

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Предисловие	9
Глава I. Элементы теории обобщенных функций одного аргумента	13
§ 1. Общие сведения и простейшие операции с обобщенными функциями	13
§ 2. Дифференцирование обобщенных функций	21
§ 3. Умножение обобщенных функций	29
§ 4. Предельные свойства обобщенных функций. Обобщенные функции, зависящие от параметра	33
§ 5. Свертка обобщенных функций	47
§ 6. Преобразование Лапласа обобщенных функций	55
§ 7. Периодические обобщенные функции	60
§ 8. Уравнения в свертках	69
Глава II. Теория линейных периодических систем	72
Вводные замечания	72
§ 1. Линейные стационарные операторы типа свертки	77
§ 2. Линейные стационарные системы	87
§ 3. Линейные стационарные операторы и системы при периодическом возбуждении. Импульсно-частотные характеристики	94
§ 4. Линейные периодические операторы и их свойства	113
§ 5. Линейные периодические системы	121
§ 6. Импульсно-частотные характеристики линейных периодических операторов и систем. Передаточные функции и ИЧХ сложных систем	130
§ 7. Передаточные функции и СИЧХ систем с обратной связью	147
§ 8. Переходные и установившиеся процессы в линейных периодических системах	155
§ 9. Устойчивость линейных периодических систем	161
§ 10. Многомерные линейные периодические системы	169

Глава III. Фильтрующие линейные периодические системы 175

Вводные замечания	175
§ 1. О фильтрующих свойствах линейных периодических систем	176
§ 2. Некоторые сведения об уравнениях Фредгольма II рода	185
§ 3. Фильтрующие линейные периодические системы с обратной связью	200
§ 4. Практический способ вычисления передаточной функции замкнутой системы	209
§ 5. Устойчивость и резонансные явления в замкнутых фильтрующих системах	213

Глава IV. Линейные периодические импульсные и цифровые системы 221

Вводные замечания	221
§ 1. Амплитудно-импульсный элемент как линейный периодический оператор	221
§ 2. Линейные экстраполирующие устройства как периодические операторы	231
§ 3. Разомкнутые линейные импульсные системы	237
§ 4. Передаточные функции замкнутых одноконтурных импульсных систем	251
§ 5. Передаточные функции многоконтурных импульсных систем	263
§ 6. Переходные процессы в периодических импульсных системах	270
§ 7. Устойчивость периодических импульсных систем. Построение характеристического уравнения	277

Глава V. Линейные системы с периодической коммутацией параметров 290

Вводные замечания	290
§ 1. Интегральные уравнения одноконтурных систем с периодической коммутацией параметров	291
§ 2. Переходные процессы одноконтурных линейных систем с коммутацией параметров	299
§ 3. Определение вынужденных колебаний в одноконтурных системах с дробно-рациональными передаточными функциями стационарных элементов	307

§ 4. Определение передаточной функции и СИЧХ одноконтурной системы	324
§ 5. Многомерные линейные системы с периодической коммутацией параметров	336
§ 6. Устойчивость линейных систем с периодической коммутацией параметров	354
§ 7. Амплитудно-импульсные системы с модуляцией I и II рода	356

Глава VI. Периодические колебания релейных и импульсных систем 362

Вводные замечания	362
§ 1. Релейные и пелнейные импульсные системы	363
§ 2. Периодические колебания релейных и импульсных систем	371
§ 3. Устойчивость периодических колебаний релейных и импульсных систем	381
§ 4. Периодические колебания одноконтурной релейной системы с нерезонансной линейной частью	392
§ 5. Периодические колебания в одноконтурной релейной системе с резонансной линейной частью	401
§ 6. Автоколебания в релейной системе с изменяющимся запаздыванием	410
§ 7. Автоколебания в системе с логическим устройством	416
§ 8. Автоколебания релейных экстремальных систем	425
§ 9. Автоколебания в системе с частотно-импульсной модуляцией	429
§ 10. Периодические режимы в нелинейных амплитудно-импульсных системах	435
§ 11. Периодические колебания в системах с шнротно-импульсными элементами	442

Глава VII. Периодические колебания кусочно-линейных систем 455

Вводные замечания	455
§ 1. Кусочно-линейные операторы и системы	456
§ 2. Определение периодических колебаний кусочно-линейных систем	462
§ 3. Устойчивость периодических колебаний кусочно-линейных систем. Уравнения в варнациях	469
§ 4. Периодические колебания в пелипейной системе с ключом	473

§ 5. Автоколебания в системе с переменной структурой при неидеальности переключающего устройства	478
§ 6. Симметричные автоколебания в системе с однозначной типовой нелинейностью	487
§ 7. Исследование автоколебаний в системе с люфтом	493
Библиографические указания	500
Литература	504
Предметный указатель	510

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973**

ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

Периодически нестационарные системы управления. Розенвассер Е. Н., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1973, 512 стр.

В книге излагаются точные методы исследования и расчета некоторых классов нестационарных и нелинейных систем управления. Основное внимание уделяется линейным системам с периодическими нестационарностями, а также нелинейным системам, работающим в периодических режимах. При этом в класс нестационарных систем, помимо традиционных, включаются дискретные и дискретно-непрерывные системы — импульсные, цифровые, экстраполирующие и т. п. В основе излагаемых методов лежит операторное описание систем управления с помощью параметрических передаточных функций и аппарат теории обобщенных функций. Основные результаты в книге доводятся до окончательных формул и алгоритмов вычисления.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и инженеров, занятых исследованием и проектированием систем управления.

Илл. 59. Библ. 113 назв.

© Издательство «Наука», 1973.

Современный этап развития теории автоматического управления характеризуется стремлением к анализу и тщательному пересмотру огромного материала, накопленного этой наукой за десятилетия ее существования. Непрерывно происходящий процесс пересмотра старого сопровождается созданием новых, более общих и содержательных точек зрения и методов исследования. На этом пути многими учеными в настоящее время ведется большая работа. При этом можно, хотя и несколько условно, выделить три основных тесно связанных между собой направления исследований:

1. Анализ и обобщение основных фундаментальных понятий теории управления, например таких, как «система», «состояние», «оператор», «передаточная функция», «весовая функция» и т. п.

2. Разработка достаточно общих математических моделей современных сложных систем управления и установление их адекватности тем или иным классам физических систем. Сюда входят математические способы описания входных и выходных сигналов, а также способы описания законов преобразования сигналов, осуществляемых элементами систем автоматического управления.

3. Разработка как точных, так и приближенных методов исследования различных классов математических моделей.

Предлагаемая вниманию читателя работа направлена на решение прикладных задач, однако изложение в ней ведется с достаточно общих позиций и затрагивает применительно к рассматриваемому классу систем все три перечисленных выше направления исследований.

Основное содержание книги можно разделить на две части.

В первой части, включающей главы II—V, излагаются теория и общие методы исследования динамики одного класса линейных нестационарных систем, названных в книге линейными периодическими системами. В этот класс включаются линейные системы с периодически меняющимися параметрами, многие импульсные и цифровые системы, системы с периодическим запаздыванием, системы с периодической коммутацией параметров и т. п. Формально линейная периодическая система отличается тем, что ее параметрическая передаточная функция $W(p, t)$ периодична по аргументу t .

Во второй части, содержащей главы VI и VII, соответствующим образом видоизмененные методы первой части применяются для решения некоторых нелинейных задач. Здесь рассматриваются переходные процессы, а также установившиеся периодические режимы широкого класса релейных, импульсных, а также кусочно-линейных систем.

Вопросам, обсуждаемым в книге, посвящена большая литература. Поэтому необходимо указать на особенности излагаемого подхода по сравнению с подходами, применявшимися ранее в этой области. Здесь можно отметить следующее.

1. В книге последовательно используется аппарат обобщенных функций. Входные и выходные сигналы рассматриваются как обобщенные функции времени, элементы систем управления трактуются при этом как некоторые операторы в пространстве обобщенных функций. Такой подход является, по существу, традиционным для задач автоматического управления. В книге этот подход углубляется и ведется с учетом многих свойств обобщенных функций, еще мало используемых в работах по автоматическому управлению. Это позволяет получить сравнительно простой и в то же время достаточно общий способ математического описания широкого класса линейных стационарных и нестационарных систем.

2. Изложение в книге систематически ведется с позиций «входа — выхода» на основе соответствующим образом уточненного понятия параметрической передаточной функции. Это позволяет с единой точки зрения рас-

сма­три­вать не­прерыв­ные, дискрет­ные и дискрет­но-не­прерыв­ные системы и пред­ло­жить для них еди­но­об­раз­ные ме­то­ды ис­сле­до­ва­ния.

3. Все из­ла­гае­мые в книге ме­то­ды ре­ше­ния ис­поль­зуют от на­ча­ла до кон­ца толь­ко струк­тур­ную схему системы и ее опе­ра­тор­ные урав­не­ния, без про­ме­жу­точ­но­го пе­ре­хо­да к ка­ким-ли­бо урав­не­ниям дви­же­ния или пе­ре­мен­ным со­сто­я­ния.

4. В книге рас­сма­три­ва­ются толь­ко точ­ные ме­то­ды ре­ше­ния, под ко­то­ры­ми по­ни­ма­ется вы­чис­ли­тель­ная про­це­ду­ра, по­зво­ля­ю­щая с про­из­воль­ной на­пе­ред за­дан­ной точ­но­стью вы­чис­лить ин­те­ре­су­ю­щие ис­сле­до­ва­те­ля ве­ли­чи­ны.

С ма­те­ма­ти­че­ской точки зре­ния книга на­пи­сана на уровне стро­го­сти, ха­рак­тер­ном для со­вре­мен­ных работ по ав­то­ма­ти­че­ско­му управ­ле­нию. По­э­то­му во мно­гих слу­чаях автор стре­мил­ся скорее об­яс­нить ход ре­ше­ния за­да­чи, чем дать стро­гую фор­му­ли­ров­ку со­от­вет­ст­вую­щей те­о­ре­мы. Тем не менее клас­сы за­дач, к ко­то­рым при­ме­ня­ются те или иные ме­то­ды ис­сле­до­ва­ния, опре­де­ля­ются до­ста­точ­но стро­го и по­дроб­но.

Би­блио­гра­фиче­ские ука­за­ния и ли­те­ра­ту­ра, при­ве­де­ные в кон­це книги, от­ра­жа­ют лишь ис­сле­до­ва­ния об­ще­го ха­рак­те­ра и ра­боты, не­по­сред­ст­вен­но ис­поль­зо­ван­ные автором. Соз­да­ние сколь­ко-ни­будь об­щей би­блио­гра­фии вряд ли было воз­мож­но в ра­мках этой книги, так как даже про­стое пе­ре­чис­ле­ние работ уче­ных, ра­бо­тав­ших в рас­сма­три­вае­мой об­ла­сти и смеж­ных, за­ня­ло бы слиш­ком мно­го места. По­э­то­му мно­гие важ­ные ра­боты в спи­ске ли­те­ра­ту­ры не ука­заны. Тем не менее даже в этом крат­ком пред­ис­ло­вии автор счита­ет своим дол­гом от­ме­тить фун­да­мен­таль­ные ис­сле­до­ва­ния со­вет­ских уче­ных А. И. Лу­рье и Я. З. Цып­кина, а также аме­ри­кан­ско­го уче­но­го Л. А. За­де, во мно­гом опре­де­лив­шие точ­ку зре­ния автора на во­про­сы, из­ла­гае­мые в книге.

Кни­га пред­на­зна­ча­ется для на­уч­ных и ин­же­нер­но-тех­ни­че­ских ра­бот­ни­ков, свя­зан­ных по ро­ду своей дея­тель­но­сти с за­да­ча­ми ис­сле­до­ва­ния не­ста­ци­о­нар­ных и не­ли­ней­ных систем ав­то­ма­ти­че­ско­го управ­ле­ния. Она мо­жет ока­заться по­лез­ной и спе­ци­а­ли­стам в дру­гих об­ла­стях, свя­зан­ных с ре­ше­нием ана­ло­гич­ных за­дач. Для по­ни­ма­ния книги от чи­та­те­ля тре­бу­ется зна­ние ма­те­ма­ти­ки

в объеме курса высшего технического учебного заведения, а также основ теории автоматического управления, включая классические методы исследования дискретных систем. Все необходимые дополнительные сведения из математики имеются в тексте книги.

Книга написана так, что главы третья, четвертая и пятая почти не зависят друг от друга, и чтение любой из них можно начинать сразу после ознакомления с первыми двумя главами. Перед чтением шестой главы целесообразно вспомнить содержание четвертой. Содержание седьмой главы самым тесным образом связано с двумя предыдущими главами. Каждой главе, за исключением первой, предпосланы также краткие вводные замечания, поясняющие существо рассматриваемых в главе вопросов.

Формулы в книге нумеруются по параграфам. Номер главы при этом не указывается. При ссылке на формулу из данного параграфа указывается только номер формулы, при ссылке на формулу другого параграфа данной главы указывается и номер параграфа, при использовании формул из другой главы указывается также и номер этой главы. Аналогично нумеруются примеры.

Большую работу по подготовке рукописи к печати и решению примеров провел М. Н. Розенвассер. Очень полезными для автора были беседы с А. А. Первозванским. Во многом помогли в работе над книгой советы рецензента Е. С. Пятницкого и редактора Е. П. Маслова. Всем им автор приносит глубокую благодарность.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Общие сведения и простейшие операции с обобщенными функциями

Обобщенные функции, в частности δ -функции, применяются при решении задач автоматического управления уже давно, однако часто без должного обоснования. При этом характерным является стремление обращаться с обобщенными функциями, как с обычными, что, как известно, в ряде случаев приводит к неясностям и парадоксам. Между тем квалифицированное применение аппарата обобщенных функций, как и всякого другого сильнодействующего средства, требует большой осторожности и внимательности. Неосторожное обращение с обобщенными функциями может привести к недоразумениям и прямым ошибкам. Избежать этого можно только при правильном понимании природы обобщенных функций и строгом учете условий, при которых с ними возможно проведение тех или иных операций, а также при уяснении смысла этих операций, в большинстве случаев отличающегося от классического.

Настоящая глава носит справочный характер и посвящена изложению простейших сведений об обобщенных функциях, совершенно необходимых для понимания основного содержания этой книги.

В главе приводится в основном известный материал, однако некоторые вопросы излагаются в главе не традиционно. Это относится, в частности, к умножению обобщенных функций и дифференцированию разрывных функций по параметру.

Читатель, знакомый с соответствующей литературой [18, 110—112], может непосредственно перейти к чтению второй главы. Читателям, ранее не сталкивавшимся с обобщенными функциями, рекомендуется прочесть всю главу, а затем возвращаться к ней по мере ссылок в последующем изложении.

Перейдем теперь к изложению основных понятий. Предположим, что задано некоторое множество функций одного аргумента Φ , такое, что если функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ принадлежат Φ , то функция

$$\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$$

также принадлежит Φ при любых постоянных α и β . Множество функций Φ в дальнейшем будем называть *пространством основных функций* или, короче, *основным пространством*, а функции $\varphi(t)$, принадлежащие Φ , т. е. такие, что $\varphi(t) \in \Phi$, будем называть основными. В дальнейшем всегда предполагается, что в пространстве основных функций определено понятие *сходимости*. Если $\varphi_i(t)$ — некоторая последовательность основных функций, то выражению

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = \varphi(t) \quad (1.1)$$

в зависимости от предварительного соглашения может быть придан различный смысл. Например, (1) может означать, что при любом t_0 $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(t_0) = \varphi(t_0)$ или что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_i(t) - \varphi(t)]^2 dt = 0$$

и т. п.

Указание смысла понятия сходимости является важной характеристикой рассматриваемого пространства основных функций. Поэтому задание некоторого пространства основных функций требует не только описания входящих в него функций, но и указания смысла понятия сходимости (топологии). В дальнейшем это всегда будет предполагаться.

Математическое правило F , позволяющее каждой основной функции из заданного пространства сопоставить некоторое число (вещественное или комплексное), называется *функционалом на этом пространстве*. Аналитически результат применения функционала F к функции φ в дальнейшем будем записывать как $\langle F, \varphi \rangle$. Если функция φ , кроме аргумента t , зависит от параметра s , т. е. фактически $\varphi = \varphi(t, s)$, то воздействие функционала F мы будем записывать в виде $\langle F_t, \varphi(t, s) \rangle$, что

говорит о том, что функционал F действует по переменной t . Величина $\langle F_t, \varphi(t, s) \rangle$ является функцией от s .

Функционал F называется *линейным*, если при любых $\varphi_1 \in \Phi$, $\varphi_2 \in \Phi$ и любых постоянных α и β

$$\langle F, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle F, \varphi_1 \rangle + \beta \langle F, \varphi_2 \rangle. \quad (1.2)$$

Функционал F называется *непрерывным на заданном пространстве основных функций* Φ , если из равенства (1) (в смысле данного пространства) следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle F, \varphi_i \rangle = \langle F, \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i \rangle = \langle F, \varphi \rangle. \quad (1.3)$$

Используя сказанное, можно ввести определение обобщенной функции.

Обобщенной функцией F называется линейный и непрерывный функционал на некотором основном пространстве Φ . Таким образом, свойства обобщенной функции существенно зависят не только от вида функционала F , но и свойств выбранного основного пространства Φ . Этим обобщенные функции отличаются от обычных функций, которые определяются сами по себе.

В настоящей книге везде в дальнейшем, где это не оговорено особо, мы будем использовать *обобщенные функции Шварца*. В этом случае основное пространство Φ представляет собой множество функций $\varphi(t)$, каждая из которых дифференцируема бесконечное количество раз и финитна, т. е. тождественно равна нулю вне некоторого конечного отрезка оси t . При этом понятие сходимости определяется следующим образом: $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(t) =$

$= \varphi(t)$, если все $\varphi_i(t)$ обращаются в нуль вне некоторого конечного отрезка, не зависящего от i , и производная любого порядка m функций φ_i равномерно сходится (в классическом смысле) к соответствующей производной функции φ . Основное пространство, обладающее перечисленными свойствами, обозначается через D . Таким образом, обобщенные функции Шварца — это линейные непрерывные функционалы на D .

Рассмотрим выражение

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt, \quad (1.4)$$

где $\varphi(t) \in D$, а $f(t)$ — обычная интегрируемая функция. По формуле (4) каждой основной функции φ из D сопоставляется число I ; поэтому выражение (4) определяет функционал на D , который, очевидно, является линейным. Можно доказать, что этот функционал также непрерывен на D . Поэтому выражение (4) определяет обобщенную функцию на D .

Таким образом, каждая интегрируемая функция $f(t)$ определяет одновременно обобщенную функцию. С этой точки зрения обычные функции входят в класс обобщенных. Однако одна и та же интегрируемая функция $f(t)$ с точки зрения классической и с точки зрения теории обобщенных функций представляет собой несколько различных объекты. С классической точки зрения $f_1(t) = f_2(t)$ в том и только том случае, когда при любом $t = t_0$ $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. Иными словами, с точки зрения классической задание функции $f(t)$ подразумевает задание ее значений при всех фиксированных значениях аргумента.

Вернемся теперь к функционалу (4). Очевидно, в силу свойств интеграла, если в (4) вместо $f(t)$ подставить функцию $f_1(t)$, отличающуюся от нее в конечном числе точек или, более того, отличающуюся от нее на множестве меры нуль, то получим тот же результат. Поэтому две интегрируемые функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, определяют одну и ту же обобщенную функцию. Отсюда вытекает, что с точки зрения обобщенных функций понятие значения функции $f(t)$ при фиксированном значении аргумента лишено смысла и функция $f(t)$ понимается как нечто целое, подлежащее интегрированию.

В дальнейшем, несмотря на указанное различие, мы будем для интегрируемой функции сохранять запись вида $f(t)$, независимо от смысла, который в нее вкладывается. Кроме того, иногда будем отождествлять интегрируемую функцию $f(t)$ и определяемый ею функционал (4).

Обобщенные функции, определяемые формулами вида (4), называются *регулярными*. Далеко не все обобщенные функции являются регулярными. Обобщенные функции, не приводящиеся к регулярным, т. е. формулам вида (4), называются *сингулярными*.

Классическим примером сингулярной обобщенной функции является так называемая δ -функция. δ -функция — это функционал, действующий по формуле

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (1.5)$$

Часто для обобщенных функций сохраняют такие же обозначения, как для обычных функций, например $\delta(t)$, а результат их действия на функцию φ записывают в виде (4), т. е.

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi(t) dt. \quad (1.6)$$

Например, при такой записи формула (5) принимает «общеизвестный» вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0). \quad (1.7)$$

Однако следует всегда помнить, что запись (7) имеет формальный характер и истинный ее смысл дается соотношением (5). δ -функция, сосредоточенная при $t = t_0$, обозначается через $\delta(t - t_0)$. $\delta(t - t_0)$ — это функционал, действующий по формуле

$$\langle \delta(t - t_0), \varphi \rangle = \varphi(t_0) \quad (1.8)$$

или, при записи, аналогичной (7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \varphi(t) dt = \varphi(t_0). \quad (1.9)$$

С точки зрения классического интегрирования формулы (7) и (9) лишены смысла.

В многочисленных практических задачах приходится иметь дело с выражениями вида $\langle F, \varphi \rangle$, где функция φ не принадлежит к пространству D . В этом случае обычно обобщенная функция F может быть «естественным образом» распространена на более широкое множество функций. Например, функционал $\delta(t - t_0)$ можно распространить на любую функцию, непрерывную в точке t_0 , а функционал (4) — на все функции $\varphi(t)$ такие, что

произведение $\varphi(t) \cdot f(t)$ интегрируемо, и т. п. Перейдем теперь к рассмотрению ряда простейших операций с обобщенными функциями.

Операции с обобщенными функциями обычно определяются таким образом, чтобы по возможности сохранить аналогию с соответствующими операциями с обыкновенными функциями. Поясним это на примере сложения. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — две интегрируемые функции, каждая из которых определяет обобщенную функцию по формулам

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \varphi(t) dt; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \varphi(t) dt.$$

Сумма $f_1 + f_2$ также определяет обобщенную функцию

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 + f_2)(t) \varphi(t) dt.$$

Опираясь на последнее выражение, естественно определить сумму двух произвольных обобщенных функций F_1 и F_2 равенством

$$\langle F_1 + F_2, \varphi \rangle = \langle F_1, \varphi \rangle + \langle F_2, \varphi \rangle. \quad (1.10)$$

Аналогично может быть определено умножение обобщенной функции на число. Если $f(t)$ — интегрируемая функция, k — число, то функция $k \cdot f(t)$ определяет функционал

$$\int_{-\infty}^{\infty} [kf(t)] \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [k\varphi(t)] dt.$$

Исходя из последнего выражения операция умножения обобщенной функции F на число k определяется следующим образом:

$$\langle kF, \varphi \rangle = \langle F, k\varphi \rangle = k \langle F, \varphi \rangle. \quad (1.11)$$

Важными операциями являются сдвиг и замена масштаба аргумента. Если $f(t)$ — интегрируемая функция, то $f(t - t_0)$, $t_0 = \text{const}$, — тоже интегрируемая функция,

определяющая обобщенную функцию по формуле

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \varphi(t) dt.$$

После замены аргумента последний интеграл приводится к виду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t + t_0) dt.$$

Таким образом, обобщенная функция $f(t - a)$ может быть определена соотношением

$$\langle f(t - a), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \varphi(t + a) \rangle.$$

По аналогии с этим равенством можно определить понятие *сдвига произвольной обобщенной функции*.

Пусть $F(t)$ — обобщенная функция; ее сдвигом $F(t - a)$ (где a — постоянная) называется новая обобщенная функция, действующая по правилу

$$\langle F(t - a), \varphi \rangle = \langle F(t), \varphi(t + a) \rangle. \quad (1.12)$$

Пусть, в частности, $F(t) = \delta(t)$. Тогда по (5) и (12)

$$\langle \delta(t - a), \varphi \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t + a) \rangle = \varphi(a). \quad (1.13)$$

Сравнивая это с (8), убеждаемся что $\delta(t - t_0)$ есть сдвиг $\delta(t)$ на величину t_0 .

Если $f(t)$ — интегрируемая функция, то функция $f(kt)$, где k — постоянная, определяет обобщенную функцию

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(kt) \varphi(t) dt.$$

Несложными преобразованиями последний интеграл приводится к виду

$$I = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi\left(\frac{t}{k}\right) dt.$$

Поэтому для произвольной обобщенной функции $F(t)$ функция $F(kt)$ определяется следующим выражением:

$$\langle F(kt), \varphi \rangle = \frac{1}{|k|} \left\langle F, \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right\rangle. \quad (1.14)$$

Если, в частности, $F(t) = \delta(t)$, то по (14)

$$\langle \delta(kt), \varphi \rangle = \frac{1}{|k|} \left\langle \delta(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right\rangle = \frac{1}{|k|} \varphi(0), \quad (1.15)$$

т. е.

$$\delta(kt) = \frac{1}{|k|} \delta(t). \quad (1.16)$$

В частности, при $k = -1$

$$\delta(t) = \delta(-t), \quad (1.17)$$

что говорит о «четности» δ -функции. Используя (17) и формальную запись в виде интеграла, можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t) \varphi(t) dt. \quad (1.18)$$

В заключение параграфа определим понятие *равенства обобщенных функций на множествах*. В общем случае две обобщенные функции F_1 и F_2 равны, и мы пишем

$$F_1 = F_2,$$

если для любой основной функции φ

$$\langle F_1, \varphi \rangle = \langle F_2, \varphi \rangle. \quad (1.19)$$

Если же равенство (19) имеет место лишь для любой основной функции φ , равной нулю вне некоторого множества M , то говорят, что

$$F_1 = F_2 \quad \text{при} \quad t \in M,$$

т. е. обобщенные функции F_1 и F_2 совпадают на множестве M . В частности, $F = 0$ при $t \in M$, если $\langle F, \varphi \rangle = 0$ для любой функции φ , равной нулю вне M .

Пример 1.1. Обобщенная функция $\delta(t) = 0$ при $t \in M$, где M — любой отрезок оси t , не содержащий точки $t = 0$. Действительно, для любой основной функции φ , равной нулю вне M , имеем $\varphi(0) = 0$, и, следовательно,

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0.$$

Совершенно аналогично показывается, что $\delta(t-t_0) = 0$, $t \in M$, где M — любой отрезок оси t , не содержащий точки $t = t_0$.

Используя сказанное, можно строить обобщенные функции, совпадающие с заданными обобщенными функциями на некоторых множествах. Пусть, например, $F(t)$ — произвольная обобщенная функция, а $a \leq t \leq b$ — отрезок оси t . Функция

$$\bar{F} = \begin{cases} 0, & t < a, \\ F, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t > b, \end{cases} \quad (1.20)$$

определяется следующим образом. Для любой основной функции φ строим основную функцию φ_ε такую, что

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} 0, & t < a - \varepsilon, \\ \varphi, & a - \varepsilon \leq t \leq b + \varepsilon, \\ 0, & t > b + \varepsilon, \end{cases} \quad (1.21)$$

где ε — сколь угодно малая постоянная, и полагаем

$$\langle \bar{F}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle F, \varphi_\varepsilon \rangle. \quad (1.22)$$

В частности, если $F = f$ — обыкновенная функция, то функция $\bar{F}$ определяет функционал

$$\int_a^b f(t) \varphi(t) dt. \quad (1.23)$$

§ 2. Дифференцирование обобщенных функций

Использование аппарата обобщенных функций открывает заманчивую возможность дифференцировать функции, которые с точки зрения классического анализа не являются дифференцируемыми. При этом, естественно, несколько изменяется смысл понятия дифференцирования.

Пусть $f(t)$ — интегрируемая функция, имеющая интегрируемую в классическом смысле производную $f' = \frac{df}{dt}$. Функция f' , будучи интегрируемой, порождает

обобщенную функцию

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \varphi(t) dt.$$

Если в этом интеграле произвести интегрирование по частям, то получится

$$I = f(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt,$$

где штрих означает производную (в классическом смысле). Внеинтегральный член в последнем соотношении пропадает, так как по предположению $\varphi \in D$ и $\varphi(\pm \infty) = 0$. Следовательно,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt, \quad (2.1)$$

или в другой записи

$$\langle f'(t), \varphi \rangle = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle. \quad (2.2)$$

Формула (2) сохранит смысл и в том случае, если в ней вместо функции $f(t)$ будет фигурировать произвольная обобщенная функция. Поэтому производная обобщенной функции $\rho F(t) = \frac{DF}{dt}$ определяется формулой

$$\left\langle \frac{DF}{dt}, \varphi \right\rangle = - \langle F, \varphi' \rangle, \quad (2.3)$$

что и является определением *производной от обобщенной функции* F . Заметим, что выше для введенной операции дифференцирования обобщенной функции мы использовали обозначения ρ и $\frac{D}{dt}$ в отличие от обозначения операции дифференцирования в классическом смысле $\frac{d}{dt}$. Эти обозначения сохраняются и в дальнейшем изложении.

Применяя последовательно формулу (3), имеем

$$\left\langle \frac{D^2 F}{dt^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{DF}{dt} \right), \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{DF}{dt}, \varphi' \right\rangle = \langle F, \varphi'' \rangle \quad (2.4)$$

и, вообще,

$$\left\langle \frac{D^n F}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \langle F, \varphi^{(n)} \rangle. \quad (2.5)$$

Замечательным и весьма важным свойством обобщенных функций Шварца является то, что каждая из них имеет производные всех порядков. Это следует непосредственно из выражения (5). Пусть теперь

$$d(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.6)$$

— полином от оператора обобщенного дифференцирования p , a_i — постоянные. Тогда для произвольной обобщенной функции F имеем

$$\langle d(p) F, \varphi \rangle = \langle (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) F, \varphi \rangle.$$

Используя (5), получаем

$$\begin{aligned} \langle d(p) F, \varphi \rangle &= \\ &= \langle F, (-1)^n a_0 \varphi^{(n)} + (-1)^{n-1} a_1 \varphi^{(n-1)} + \dots + a_n \varphi \rangle, \end{aligned}$$

т. е. окончательно

$$\langle d(p) F, \varphi \rangle = \langle F, d(-p) \varphi \rangle. \quad (2.7)$$

Дифференциальный оператор $d(-p)$ называется сопряженным по отношению к $d(p)$.

Вычислим, используя сказанное, производные от δ -функции. Пусть $\delta'(t) = p\delta(t)$. По (3) имеем

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0), \quad (2.8)$$

или при интегральной форме записи

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \varphi(t) dt = -\varphi'(0). \quad (2.9)$$

Аналогично, используя (5), имеем

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad (2.10)$$

т. е. в интегральной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \varphi(t) dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(0). \quad (2.11)$$

С помощью формул предыдущего параграфа легко установить свойства сдвинутых производных от δ -функции. По (1.13) и (10)

$$\langle \delta^{(n)}(t - t_0), \varphi \rangle = \langle \delta_t^{(n)}, \varphi(t + t_0) \rangle = (-1)^n \langle \delta_t, \varphi^{(n)}(t + t_0) \rangle = \\ = (-1)^n \varphi^{(n)}(t_0), \quad (2.12)$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) \varphi(t) dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(t_0). \quad (2.13)$$

Аналогичные вычисления с использованием (1.15) и (11) дают

$$\langle \delta^{(n)}(kt), \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta(kt), \varphi^{(n)} \rangle = \frac{(-1)^n}{|k|} \varphi^{(n)}(0). \quad (2.14)$$

Важной особенностью операции обобщенного дифференцирования является возможность ее применения к *разрывным интегрируемым функциям*. Перейдем к рассмотрению этого вопроса. Пусть интегрируемая функция $f(t)$ дается выражениями

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & -\infty < t < t_0, \\ f_2(t), & t_0 < t < \infty, \end{cases} \quad (2.15)$$

где f_1 и f_2 — бесконечно дифференцируемые в классическом смысле функции.

Найдем обобщенную производную от функции $f(t)$. По (3) имеем

$$\langle pf, \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \\ = - \int_{-\infty}^{t_0} f_1(t) \varphi'(t) dt - \int_{t_0}^{\infty} f_2(t) \varphi'(t) dt.$$

Но, интегрируя по частям, имеем, учитывая, что $\varphi(\pm \infty) = 0$,

$$- \int_{-\infty}^{t_0} f_1(t) \varphi'(t) dt = - f_1(t_0) \varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} \frac{df_1(t)}{dt} \varphi(t) dt, \\ - \int_{t_0}^{\infty} f_2(t) \varphi'(t) dt = f_2(t_0) \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \frac{df_2(t)}{dt} \varphi(t) dt.$$

Складывая два последних выражения, получим

$$-\langle f, \varphi' \rangle = [f_2(t_0) - f_1(t_0)] \varphi(t_0) + \\ + \int_{-\infty}^{t_0} \frac{df_1(t)}{dt} \varphi(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} \frac{df_2(t)}{dt} \varphi(t) dt. \quad (2.16)$$

Введем теперь понятие *обыкновенной производной* $\frac{df}{dt}$ от *разрывной функции* $f(t)$. По определению обыкновенная производная $\frac{df}{dt}$ равна производной от $f(t)$ в классическом смысле в точках, где она существует, и не определена в точках разрыва $f(t)$. Иными словами,

$$\frac{df}{dt} = \begin{cases} \frac{df_1}{dt}, & -\infty < t < t_0, \\ \frac{df_2}{dt}, & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

Заметим теперь, что величина

$$f_2(t_0) - f_1(t_0) = f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0) = \Delta f(t_0) \quad (2.18)$$

представляет собой разрыв функции $f(t)$ в точке t_0 . С учетом (17) и (18) соотношение (16) принимает вид

$$\langle pf, \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = \Delta f(t_0) \varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \varphi(t) dt. \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь обобщенную функцию

$$F = \Delta f(t_0) \delta(t - t_0) + \frac{df}{dt}.$$

Очевидно,

$$\langle F, \varphi \rangle = \Delta f(t_0) \varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} \varphi(t) dt,$$

..., n) и каждая из них интегрируема и претерпевает разрывы в точках t_i^s . Тогда

$$\left. \begin{aligned} pf &= \frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt} + \sum_i \Delta f(t_i) \delta(t - t_i), \\ p^2 f &= \frac{D^2 f}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} + \sum_i \Delta f(t_i) \delta'(t - t_i) + \\ &\quad + \sum_i \Delta f'(t_i) \delta(t - t_i), \\ \dots \dots \dots \\ p^n f &= \frac{D^n f}{dt^n} = \frac{d^n f}{dt^n} + \sum_i \Delta f(t_i) \delta^{(n-1)}(t - t_i) + \dots \\ &\quad \dots + \sum_i \Delta f^{(n-1)}(t_i^{(n-1)}) \delta(t - t_i^{(n-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Иногда вместо (24) удобно применить более простую запись. Будем считать, что t_v — точки, в которых претерпевает разрывы функция f или производные $\frac{d^s f}{dt^s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$), т. е. множество t_v включает все точки $t_i, t_i', t_i'', \dots, t_i^{(n-1)}$. Тогда имеем более простое по форме соотношение:

$$p^n f = \frac{d^n f}{dt^n} + \sum_v \Delta f_v \delta^{(n-1)}(t - t_v) + \dots + \sum_v \Delta f_v^{(n-1)} \delta(t - t_v), \quad (2.25)$$

где использовано обозначение

$$\Delta f_v^{(m)} = \Delta f^{(m)}(t_v), \quad (2.26)$$

которым мы также будем пользоваться в дальнейшем изложении.

Пусть теперь $d(p)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (6). Вычислим величину $d(p)f$, где f — разрывная функция. Для этого воспользуемся формулой (25). Имеем

$$d(p)f = a_0 p^n f + a_1 p^{n-1} f + \dots + a_n f.$$

Подставляя сюда соответствующие выражения (25), после приведения подобных членов получим

$$d(p)f = d\left(\frac{d}{dt}\right)f + \sum_v K_v \delta^{(n-1)}(t - t_v) + \dots \\ \dots + \sum_v K_v^{(n-1)} \delta(t - t_v), \quad (2.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_v &= a_0 \Delta f_v, \\ K'_v &= a_0 \Delta f'_v + a_1 \Delta f_v, \\ K''_v &= a_0 \Delta f''_v + a_1 \Delta f'_v + a_2 \Delta f_v, \\ &\dots \\ K_v^{(n-1)} &= a_0 \Delta f_v^{(n-1)} + a_1 \Delta f_v^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \Delta f_v \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

и

$$d\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \quad (2.29)$$

— полином от оператора обыкновенного дифференцирования $\frac{d}{dt}$.

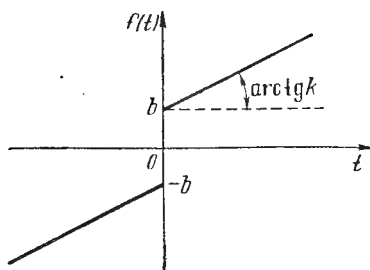


Рис. 1.

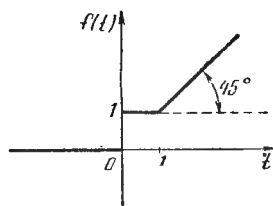


Рис. 2.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим два простых примера.

Пример 2.1. Пусть (рис. 1)

$$f(t) = \begin{cases} kt - b, & -\infty < t < 0, \\ kt + b, & 0 < t < \infty. \end{cases}$$

В этом случае

$$\frac{df}{dt} = k = \text{const}$$

и имеется одна точка разрыва $t = 0$, причем

$$\Delta f(0) = 2b.$$

Поэтому по (20) и (22)

$$pf = k + 2b\delta(t), \quad p^2f = 2b\delta'(t).$$

Пример 2.2. Пусть (рис. 2)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ 1, & 0 < t < 1, \\ t, & 1 < t < \infty. \end{cases}$$

При этом

$$\frac{df}{dt} = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 1, \\ 1, & 1 < t < \infty, \end{cases} \quad \Delta f(0) = 1,$$

и, следовательно,

$$\frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt} + \delta(t).$$

Далее, имеем

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 0, \quad \Delta f'(1) = 1.$$

Поэтому

$$\frac{D^2f}{dt^2} = \delta(t-1) + \delta'(t) \quad \text{и т. д.}$$

§ 3. Умножение обобщенных функций

Операция *умножения обобщенных функций* существенно отличается от умножения обычных функций и возможна не всегда. Например, произведение $\delta(t) \cdot \delta(t)$ в рамках теории обобщенных функций лишено смысла. Также лишено смысла выражение $\delta(t) \cdot f(t)$, где $f(t)$ — обыкновенная функция, разрывная при $t = 0$. Тем не менее можно выделить ряд важных случаев, охватывающих многие приложения, когда умножение возможно. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

Пусть F — обобщенная функция, α — обыкновенная интегрируемая функция, φ — основная функция.

Произведение $F\alpha$ определяется как обобщенная функция следующим образом:

$$\langle \alpha F, \varphi \rangle = \langle F, \alpha \varphi \rangle, \quad (3.1)$$

причем предполагается, что выражение $\langle F, \alpha \varphi \rangle$ имеет смысл при любой функции $\varphi \in D$.

Если, например, $F = \delta(t)$, $\alpha(t)$ — функция, непрерывная при $t = 0$, то

$$\langle \alpha(t) \delta(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta, \alpha \varphi \rangle = \alpha(0) \varphi(0) = \langle \alpha(0) \delta(t), \varphi(t) \rangle,$$

т. е.

$$\alpha(t) \delta(t) = \alpha(0) \delta(t). \quad (3.2)$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$\alpha(t) \delta(t - t_0) = \alpha(t_0) \delta(t - t_0), \quad (3.3)$$

если только функция $\alpha(t)$ непрерывна при $t = t_0$. Если $F = \delta'(t)$, то формально

$$\begin{aligned} \langle \alpha \delta', \varphi \rangle &= \langle \delta', \alpha \varphi \rangle = - \langle \delta, (\alpha \varphi)' \rangle = - (\alpha \varphi)'_{t=0} = \\ &= - \alpha(0) \varphi'(0) - \alpha'(0) \varphi(0) = \langle \alpha(0) \delta' - \alpha'(0) \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Последнее выражение показывает, что

$$\alpha(t) \delta'(t) = \alpha(0) \delta'(t) - \alpha'(0) \delta(t), \quad (3.4)$$

причем эта формула имеет смысл и верна, если только функция $\alpha(t)$ непрерывна вместе со своей производной при $t = 0$. Аналогично при $F = \delta^{(m)}(t)$ имеем формально

$$\langle \alpha(t) \delta^{(m)}(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta^{(m)}(t), \alpha(t) \varphi(t) \rangle = (-1)^m \langle \delta, (\alpha \varphi)^{(m)} \rangle;$$

после выкладок, аналогичных проведенным при выводе соотношения (4), отсюда нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \alpha(t) \delta^{(m)}(t) &= \alpha(0) \delta^{(m)}(t) - m \alpha'(0) \delta^{(m-1)}(t) + \\ &+ \frac{m(m-1)}{2!} \alpha''(0) \delta^{(m-2)}(t) + \dots + (-1)^m \alpha^{(m)}(0) \delta(t); \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом функция $\alpha(t)$ должна иметь при $t = 0$ непрерывные производные до m -й включительно. Точно так же

доказывается формула

$$\begin{aligned} \alpha(t) \delta^{(m)}(t - t_0) = & \alpha(t_0) \delta^{(m)}(t - t_0) - m \alpha'(t_0) \delta^{(m-1)}(t - t_0) + \\ & + \frac{m(m-1)}{2!} \alpha''(t_0) \delta^{(m-2)}(t - t_0) + \dots \\ & \dots + (-1)^m \alpha^{(m)}(t_0) \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

при соответствующих требованиях относительно дифференцируемости $\alpha(t)$ в точке t_0 . Сокращенно формулу (6) можно записать в виде

$$\alpha(t) \delta^{(m)}(t - \xi) = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} [\alpha(\xi) \delta(t - \xi)]. \quad (3.7)$$

Используя формулу (6), можно утверждать следующее: если обобщенная функция F является производной n -го порядка от некоторой интегрируемой функции f , то произведение αF существует, если только функция $\alpha(t)$ и ее производные в классическом смысле до $(n-1)$ -й включительно непрерывны в точках разрыва функций

$$f, \quad \frac{df}{dt}, \quad \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}.$$

Действительно, в этом случае F имеет вид

$$F = g(t) + \sum_i \sum_j K_{ij} \delta^{(i)}(t - t_j),$$

где K_{ij} , t_j — некоторые константы, g — обыкновенная функция, и из (6) непосредственно следует, что произведение αF имеет смысл.

Другим важным случаем, когда произведение всегда возможно, является тот, когда обе перемножаемые функции являются обыкновенными интегрируемыми функциями и их произведение тоже интегрируемо.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании произведения двух обобщенных функций.

В классическом анализе существует известная формула

$$\frac{d}{dt} (f_1 \cdot f_2) = f_1 \frac{df_2}{dt} + f_2 \frac{df_1}{dt}.$$

Однако для обобщенных функций аналогичная формула

дифференцирования

$$\frac{D}{dt} (F_1 \cdot F_2) = F_1 \frac{DF_2}{dt} + F_2 \frac{DF_1}{dt}$$

в общем случае неверна. Говоря точнее, может оказаться, что выражение в правой части этой формулы лишено смысла, в то время как левая часть вполне определена.

Пример 3.1. Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть интегрируемые функции f_1 и f_2 претерпевают разрыв в единственной точке t_0 и их произведение интегрируемо. Тогда произведение $f_1 \cdot f_2$ определяет обобщенную функцию, причем

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} (f_1 \cdot f_2) &= \frac{d(f_1 \cdot f_2)}{dt} + \\ &+ [f_1(t_0 + 0) \cdot f_2(t_0 + 0) - f_1(t_0 - 0) f_2(t_0 - 0)] \delta(t - t_0). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{Df_1}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \Delta f_1(t_0) \delta(t - t_0), \quad \frac{Df_2}{dt} = \frac{df_2}{dt} + \Delta f_2(t_0) \delta(t - t_0).$$

При этом произведения $f_1 \frac{Df_2}{dt}$ и $f_2 \frac{Df_1}{dt}$ лишены смысла, так как в них входят произведения $f_1 \delta(t - t_0)$, $f_2 \delta(t - t_0)$, лишенные смысла, поскольку f_1 и f_2 претерпевают разрывы при $t = t_0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае пользоваться аналогом классической формулы дифференцирования произведения, вообще говоря, нельзя.

В то же время можно доказать [16], что если определено хотя бы одно произведение в правой части этой формулы, то определены и остальные два произведения, входящие в равенство, и сама формула будет верной. В практических задачах, однако, рекомендуется непосредственно вычислять произведение в левой части и производить дифференцирование полученного выражения. Это позволяет избежать путаницы и возможных ошибок. Если, однако, f_1 и f_2 — две интегрируемые функции, не имеющие общих точек разрыва, то

$$\frac{D(f_1 \cdot f_2)}{dt} = \frac{Df_1}{dt} \cdot f_2 + f_1 \frac{Df_2}{dt}. \quad (3.8)$$

Докажем формулу (8). Пусть λ_i — точки разрыва функции f_1 , μ_j — точки разрыва функции f_2 , причем

$\lambda_i \neq \mu_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{Df_1}{dt} &= \frac{df_1}{dt} + \sum_i \Delta f_1(\lambda_i) \delta(t - \lambda_i), \\ \frac{Df_2}{di} &= \frac{df_2}{di} + \sum_j \Delta f_2(\mu_j) \delta(t - \mu_j).\end{aligned}$$

Произведения $f_1 \frac{Df_2}{dt}$ и $f_2 \frac{Df_1}{dt}$ имеют смысл, и можно написать после несложных преобразований с учетом (2)

$$\begin{aligned}\frac{Df_1}{dt} f_2 + \frac{Df_2}{dt} f_1 &= \frac{df_1}{dt} f_2 + \frac{df_2}{dt} f_1 + \sum_i f_2(\lambda_i) \Delta f_1(\lambda_i) \delta(t - \lambda_i) + \\ &+ \sum_j f_1(\mu_j) \Delta f_2(\mu_j) \delta(t - \mu_j).\end{aligned}\quad (3.9)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\frac{D(f_1 \cdot f_2)}{dt} &= \frac{d(f_1 \cdot f_2)}{dt} + \\ &+ \sum_i [f_1(\lambda_i + 0) \cdot f_2(\lambda_i + 0) - f_1(\lambda_i - 0) \cdot f_2(\lambda_i - 0)] \delta(t - \lambda_i) + \\ &+ \sum_j [f_1(\mu_j + 0) f_2(\mu_j + 0) - f_1(\mu_j - 0) f_2(\mu_j - 0)] \delta(t - \mu_j).\end{aligned}\quad (3.10)$$

Но

$$\frac{d(f_1 \cdot f_2)}{dt} = \frac{df_1}{dt} f_2 + f_1 \frac{df_2}{dt}.$$

Кроме того, в силу предположенного

$$f_2(\lambda_i + 0) = f_2(\lambda_i - 0), \quad f_1(\mu_j + 0) = f_1(\mu_j - 0).$$

Подставляя три последних соотношения в (10), мы и приходим к формуле (9).

§ 4. Предельные свойства обобщенных функций. Обобщенные функции, зависящие от параметра

Одним из важных свойств обобщенных функций является простота выполнения с ними ряда предельных операций.

По определению последовательность обобщенных функций F_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) сходится к обобщенной

функции F , если для любой основной функции φ имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle F_i, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle. \quad (4.1)$$

По определению ряд $\sum_i F_i$ сходится к обобщенной функции F , если для любой основной функции φ числовой ряд $\sum_i \langle F_i, \varphi \rangle$ сходится к сумме $\langle F, \varphi \rangle$.

Доказано, что пространство обобщенных функций полно относительно введенного понятия сходимости. Это эквивалентно следующему: если дана последовательность обобщенных функций F_i такая, что каждая числовая последовательность $\langle F_i, \varphi \rangle$ имеет предел, то функционал

$$\langle F, \varphi \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle F_i, \varphi \rangle \quad (4.2)$$

снова является обобщенной функцией.

В частности, отсюда следует, что сумма сходящегося ряда обобщенных функций всегда является обобщенной функцией. В классическом анализе аналогичная теорема не имеет места. Например, сумма сходящегося ряда из непрерывных функций может быть функцией разрывной.

Из приведенной теоремы следует, что любая равномерно сходящаяся в классическом смысле последовательность интегрируемых функций сходится в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций (1).

Другим замечательным свойством обобщенных функций является возможность неограниченного дифференцирования сходящихся последовательностей и рядов. Именно:

а) Если $F_i \rightarrow F$ в смысле (1), то $F_i^{(m)} \rightarrow F^{(m)}$ при любом m . Иными словами, сходящуюся последовательность обобщенных функций можно дифференцировать любое количество раз. Известно, что в классическом анализе возможна радикально противоположная ситуация, когда даже равномерно сходящуюся последовательность дифференцировать нельзя.

б) Всякий сходящийся ряд обобщенных функций можно дифференцировать под знаком Σ .

Любая равномерно сходящаяся последовательность интегрируемых функций может рассматриваться как сходящаяся последовательность обобщенных функций. Поэтому равномерно сходящуюся последовательность интегрируемых функций можно дифференцировать (в обобщенном смысле) неограниченное количество раз. В частности, любой равномерно сходящийся ряд интегрируемых функций можно дифференцировать (в обобщенном смысле) под знаком Σ . В классическом же смысле дифференцировать равномерно сходящийся ряд можно, вообще говоря, лишь в том случае, если сходится равномерно ряд, полученный в результате дифференцирования.

Перейдем теперь к рассмотрению *обобщенных функций, зависящих от параметра*. Пусть каждому значению вещественного или комплексного параметра α , пробегающего некоторую область A , поставлена в соответствие некоторая обобщенная функция $F(t, \alpha)$. Тогда, в соответствии с введенным определением, обобщенная функция F является пределом $F(t, \alpha)$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, если числовая функция $\langle F(t, \alpha), \varphi \rangle$ стремится при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ к $\langle F, \varphi \rangle$ при любом φ . Обобщенная функция $F(t, \alpha)$ называется непрерывной функцией по α в области A , если при любом α_0 из этой области

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(t, \alpha) = F(t, \alpha_0). \quad (4.3)$$

Можно доказать, что производные по t от функции $F(t, \alpha)$ являются непрерывными по α , если таковой является сама функция $F(t, \alpha)$. Используя введенные понятия, можно ввести определение *производной от обобщенной функции $F(t, \alpha)$ по параметру α* . Обобщенная функция g называется производной от обобщенной функции $F(t, \alpha)$ по параметру α при $\alpha = \alpha_0$, если

$$g = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{F(t, \alpha) - F(t, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \frac{DF}{d\alpha}(\alpha_0), \quad (4.4)$$

где сходимость понимается в смысле (1).

Можно доказать, что для существования производной $\frac{DF}{d\alpha}$ при $\alpha = \alpha_0$ необходимо и достаточно, чтобы все числовые функции $\langle F(t, \alpha), \varphi \rangle$ были дифференцируемы (в классическом смысле) при $\alpha = \alpha_0$. Обозначим

$$\langle F(t, \alpha), \varphi \rangle = q(\alpha); \quad (4.5)$$

тогда из (4) вытекает, что если существует предел

$$\left\langle \frac{DF}{\partial \alpha}, \varphi \right\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{q(\alpha) - q(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}, \quad (4.6)$$

то он равен $\frac{dq}{d\alpha}$, т. е.

$$\frac{dq(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \langle F(t, \alpha), \varphi \rangle = \left\langle \frac{DF}{\partial \alpha}(t, \alpha), \varphi \right\rangle. \quad (4.7)$$

Это равенство может служить определением производной от обобщенной функции F по параметру.

Если функция $\frac{DF}{\partial \alpha}$ имеет производную в смысле (4) при любом α из области A , то она называется дифференцируемой по α в области A .

Аналогичным путем можно определить высшие производные по параметру. При этом, если функция $\frac{DF}{\partial \alpha}$ дифференцируема по α в области A , то все производные от $\frac{DF}{\partial \alpha}$ по t также дифференцируемы по α в этой области и справедлива формула

$$\frac{D}{\partial \alpha} \frac{D}{\partial t} F(t, \alpha) = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial \alpha} F(t, \alpha). \quad (4.8)$$

Аналогичное свойство коммутативности обобщенного дифференцирования по различным аргументам имеет место и для высших производных.

Если α — комплексный параметр, то дифференцируемая в открытой области A обобщенная функция $F(t, \alpha)$ называется аналитической функцией от α . В этом случае все функции $\frac{d^k F}{d\alpha^k}$ являются в области A обычными аналитическими функциями от α . При этом в области A существуют все производные $\frac{D^k F}{\partial \alpha^k}$ и в окрестности каждой точки α_0 из области A имеет место разложение в ряд Тейлора

$$F(t, \alpha) = F(t, \alpha_0) + \frac{\alpha - \alpha_0}{1!} \frac{DF}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) + \dots \quad (4.9)$$

Ряд (9) может иметь место и в том случае, когда параметр α принимает только вещественные значения, если

множество его значений входит в область аналитичности по комплексному параметру.

Перейдем теперь к выводу формул обобщенных производных по параметру для конкретных случаев. Предположим, что нам задана разрывная функция

$$f_{\alpha}(t) = f(t, \alpha) = \begin{cases} f_1(t, \alpha), & -\infty < t < t_0(\alpha), \\ f_2(t, \alpha), & t_0(\alpha) < t < \infty, \end{cases} \quad (4.10)$$

где функции $f_1(t, \alpha)$ и $f_2(t, \alpha)$ имеют производные всех порядков в классическом смысле по t, α . Функцию $t_0(\alpha)$, определяющую координату точки разрыва, также будем считать аналитической.

Вычислим производную по α от обобщенной функции, соответствующей разрывной функции (10).

Для любой функции φ , очевидно, имеем

$$\left. \begin{aligned} \langle f_{\alpha}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{t_0(\alpha)} f_1(t, \alpha) \varphi(t) dt + \int_{t_0(\alpha)}^{\infty} f_2(t, \alpha) \varphi(t) dt, \\ \langle f_{\alpha+\Delta\alpha}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{t_0(\alpha+\Delta\alpha)} f_1(t, \alpha+\Delta\alpha) \varphi(t) dt + \\ &\quad + \int_{t_0(\alpha+\Delta\alpha)}^{\infty} f_2(t, \alpha+\Delta\alpha) \varphi(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Но в соответствии с (6)

$$\left\langle \frac{Df_{\alpha}}{D\alpha}, \varphi \right\rangle = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left\langle \frac{f_{\alpha+\Delta\alpha} - f_{\alpha}}{\Delta\alpha}, \varphi \right\rangle.$$

Поэтому с учетом (11) имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{Df_{\alpha}}{D\alpha}, \varphi \right\rangle &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{t_0(\alpha+\Delta\alpha)} f_1(t, \alpha+\Delta\alpha) \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{t_0(\alpha)} f_1(t, \alpha) \varphi(t) dt \right] + \\ &+ \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \left[\int_{t_0(\alpha+\Delta\alpha)}^{\infty} f_2(t, \alpha+\Delta\alpha) \varphi(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0(\alpha)}^{\infty} f_2(t, \alpha) \varphi(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Учитывая, что функция φ отлична от нуля в ограниченной области, учитывая оговоренные выше свойства функций f_1 , f_2 , t_0 и используя классические теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, из (12) получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{Df_\alpha}{d\alpha}, \varphi \right\rangle &= \frac{d}{d\alpha} \langle f_\alpha, \varphi \rangle = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left[\int_{-\infty}^{t_0(\alpha)} f_1(t, \alpha) \varphi(t) dt + \int_{t_0(\alpha)}^{\infty} f_2(t, \alpha) \varphi(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Выполняя в этом выражении дифференцирование по α , получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{Df_\alpha}{d\alpha}, \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{t_0(\alpha)} \frac{\partial f_1(t, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi(t) dt + \int_{t_0(\alpha)}^{\infty} \frac{\partial f_2(t, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi(t) dt + \\ &+ f_1(t_0, \alpha) \frac{dt_0}{d\alpha} \varphi(t_0) - f_2(t_0, \alpha) \frac{dt_0}{d\alpha} \varphi(t_0). \quad (4.13) \end{aligned}$$

Если обозначить, аналогично предыдущему,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}, & -\infty < t < t_0(\alpha), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}, & t_0(\alpha) < t < \infty, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\Delta f(t_0) = f_2(t_0) - f_1(t_0) = f_2[t_0(\alpha), \alpha] - f_1[t_0(\alpha), \alpha], \quad (4.15)$$

то из (13) получим

$$\left\langle \frac{Df_\alpha}{d\alpha}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(t, \alpha) \varphi(t) dt - \Delta f(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} \varphi(t_0). \quad (4.16)$$

Если учесть, что

$$\left\langle \frac{Df_\alpha}{d\alpha}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Df(t, \alpha)}{d\alpha} \varphi(t) dt, \quad (4.17)$$

то, сравнивая с (16), находим интересующее нас выражение

$$\frac{Df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \Delta f(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} \delta(t - t_0), \quad (4.18)$$

определяющее обобщенную производную $\frac{Df}{d\alpha}$ при каждом фиксированном значении α .

Отметим, что в том случае, когда координата точки разрыва t_0 от параметра α не зависит, то $\frac{dt_0}{d\alpha} = 0$ и из (18) получаем

$$\frac{Df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad (4.19)$$

т. е. в этом случае обобщенная и обычная частные производные по параметру от разрывной функции $f(t, \alpha)$ совпадают.

Производные старших порядков можно получить путем дифференцирования выражения (18), для чего необходимо получить правило дифференцирования функции $\delta(t - t_0(\alpha))$.

Используя (4), имеем при каждом фиксированном α

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\delta(t - t_0(\alpha))}{d\alpha}, \varphi \right\rangle &= \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \langle \delta(t - t_0(\alpha + \Delta\alpha)) - \delta(t - t_0(\alpha)), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая основное свойство δ -функции (1.8), находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\delta(t - t_0(\alpha))}{d\alpha}, \varphi \right\rangle &= \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0(\alpha + \Delta\alpha)) - \varphi(t_0(\alpha))}{\Delta\alpha} = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Если учесть также вытекающее из (2.12) соотношение

$$\langle \delta'(t - t_0), \varphi \rangle = -\varphi'(t_0),$$

то, сравнивая с (20), получаем

$$\frac{D\delta(t - t_0(\alpha))}{d\alpha} = -\delta'(t - t_0) \frac{dt_0}{d\alpha}, \quad (4.21)$$

что по форме совпадает с обычным правилом дифференцирования сложных функций, и вообще имеем

$$\frac{D}{d\alpha} \delta^{(s)}(t - t_0(\alpha)) = -\delta^{(s+1)}(t - t_0) \frac{dt_0}{d\alpha}. \quad (4.22)$$

Используя (22), последовательным дифференцированием можно получить старшие производные по параметру α

от разрывной функции f . Например, дифференцируя (18) по α , имеем

$$\frac{D^2 f}{d\alpha^2} = \frac{D}{d\alpha} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right] - \left[\frac{D}{d\alpha} \delta(t - t_0) \right] \Delta f(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} - \\ - \frac{d}{d\alpha} \left[\Delta f(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} \right] \delta(t - t_0). \quad (4.23)$$

С учетом приведенных выше соотношений имеем

$$\frac{D}{d\alpha} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} - \Delta f'_\alpha(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} \delta(t - t_0), \quad (4.24)$$

где

$$\Delta f'_\alpha(t_0) = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(t_0) - \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(t_0), \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\Delta f(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} \right] = \Delta f(t_0) \frac{d^2 t_0}{d\alpha^2} + \frac{d\Delta f(t_0)}{d\alpha} \frac{dt_0}{d\alpha}. \quad (4.26)$$

Кроме того, учитывая (15), находим

$$\frac{d}{d\alpha} \Delta f(t_0) = \frac{d}{d\alpha} [f_2(t_0(\alpha), \alpha) - f_1(t_0(\alpha), \alpha)] = \Delta f'_{t_0} \frac{dt_0}{d\alpha} + \Delta f'_\alpha, \quad (4.27)$$

$$\Delta f'_{t_0} = \frac{\partial f_2(t_0, \alpha)}{\partial t_0} - \frac{\partial f_1(t_0, \alpha)}{\partial t_0}, \quad (4.28)$$

где символ $\frac{d}{d\alpha}$ означает так называемую полную частную производную. Поэтому

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\Delta f(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} \right] = \Delta f(t_0) \frac{d^2 t_0}{d\alpha^2} + \Delta f'_{t_0} \left(\frac{dt_0}{d\alpha} \right)^2 + \Delta f'_\alpha \frac{dt_0}{d\alpha}. \quad (4.29)$$

Подставляя выражения (24), (29) в формулу для $\frac{D^2 f}{d\alpha^2}$, получаем

$$\frac{D^2 f}{d\alpha^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \delta'(t - t_0) \Delta f(t_0) \left(\frac{dt_0}{d\alpha} \right)^2 - \\ - \delta(t - t_0) \left[2 \Delta f'_\alpha \frac{dt_0}{d\alpha} + \Delta f(t_0) \frac{d^2 t_0}{d\alpha^2} + \Delta f'_{t_0} \left(\frac{dt_0}{d\alpha} \right)^2 \right]. \quad (4.30)$$

Легко видеть, что в силу сделанных предположений функция (10) имеет производные всех порядков.

В дальнейшем функции вида

$$f(t, \alpha) = f_i(t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha), \quad (4.31)$$

где функции $f_i(t, \alpha)$ аналитичны по t и α , а функции $t_i(\alpha)$ аналитичны по α , мы будем называть кусочно-аналитическими функциями. Обобщая сказанное, можно утверждать, что кусочно-аналитическая функция (31) всегда определяет обобщенную функцию, аналитическую по α , т. е. имеющую по α обобщенные производные всех порядков. При этом при каждом α

$$\frac{Df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \sum_i \Delta f(t_i) \frac{dt_i}{d\alpha} \delta(t - t_i), \quad (4.32)$$

а остальные производные получаются путем последовательного дифференцирования равенства (32). При этом в смысле теории обобщенных функций функция (31) раскладывается в ряд Тейлора в окрестности каждой точки $\alpha_0 \in A$:

$$f(t, \alpha) = f(t, \alpha_0) + \frac{(\alpha - \alpha_0)}{1!} \cdot \frac{Df}{d\alpha}(t, \alpha_0) + \\ + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2!} \cdot \frac{D^2 f(t, \alpha_0)}{d\alpha^2} + \dots \quad (4.33)$$

Отметим, что из формулы (32) вытекает одно удобное символическое соотношение. Если считать в функции (31) t и α равноправными аргументами, то, фиксируя $t = t_0$, мы получаем обычную разрывную функцию, претерпевающую разрыв при $\alpha = \alpha_0(t)$. Для этой функции имеем в соответствии с (2.20)

$$\frac{D}{d\alpha} f(t_0, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \Delta f(t_0) \delta(\alpha - \alpha(t_0)). \quad (4.34)$$

Сравнивая (18) с (34), получаем соотношение

$$\delta(\alpha - \alpha(t)) = - \delta(t - t(\alpha)) \frac{dt}{d\alpha}, \quad (4.35)$$

позволяющее переходить от обобщенного дифференцирования по α к аргументу t . В формуле (35) индекс «0» отброшен, так как за t_0 может быть взят любой момент t .

Используя приведенные соотношения, нетрудно получить правила дифференцирования и разложения в ряд Тейлора обобщенных функций, зависящих от нескольких параметров.

Пусть, например, имеем разрывную функцию, зависящую от двух параметров:

$$f(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} f_1(t, \alpha, \beta), & -\infty < t < t_0(\alpha, \beta), \\ f_2(t, \alpha, \beta), & t_0(\alpha, \beta) < t < \infty, \end{cases} \quad (4.36)$$

где все функции справа аналитичны по α и β . Разложение функции (36) в окрестности точки α_0, β_0 в обобщенный ряд Тейлора по аналогии с обычными функциями от двух аргументов должно иметь вид

$$\begin{aligned} f(t, \alpha, \beta) = & f(t, \alpha_0, \beta_0) + \frac{(\alpha - \alpha_0)}{1!} \frac{Df}{D\alpha}(t, \alpha_0, \beta_0) + \frac{(\beta - \beta_0)}{1!} \frac{Df}{D\beta}(t, \alpha_0, \beta_0) + \\ & + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2!} \frac{D^2 f}{D\alpha^2}(t, \alpha_0, \beta_0) + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{2!} \frac{D^2 f}{D\beta^2}(t, \alpha_0, \beta_0) + \\ & + \frac{2(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)}{2!} \frac{D^2 f}{D\alpha D\beta}(t, \alpha_0, \beta_0) + \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

Частные производные первого порядка, входящие в формулу (37), вычисляются с помощью (18):

$$\frac{Df}{D\alpha}(t, \alpha_0, \beta_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(t, \alpha_0, \beta_0) - \Delta f(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \delta(t - t_0), \quad (4.38)$$

$$\frac{Df}{D\beta}(t, \alpha_0, \beta_0) = \frac{\partial f}{\partial \beta}(t, \alpha_0, \beta_0) - \Delta f(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \delta(t - t_0), \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(t, \alpha_0, \beta_0) = \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(t, \alpha_0, \beta_0), & -\infty < t < t_0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(t, \alpha_0, \beta_0), & t_0 < t < \infty, \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(t, \alpha_0, \beta_0) = \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \beta}(\alpha_0, \beta_0), & -\infty < t < t_0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \beta}(\alpha_0, \beta_0), & t_0 < t < \infty, \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\Delta f(t_0) = f_2(t_0, \alpha_0, \beta_0) - f_1(t_0, \alpha_0, \beta_0), \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial t_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial t_0}{\partial \alpha}(\alpha_0, \beta_0), \quad \frac{\partial t_0}{\partial \beta} = \frac{\partial t_0}{\partial \beta}(\alpha_0, \beta_0).$$

Производные $\frac{D^2 f}{\partial \alpha^2}$, $\frac{D^2 f}{\partial \beta^2}$ подсчитываются в соответствии с (30):

$$\begin{aligned} \frac{D^2 f(t, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \delta'(t - t_0) \Delta f(t_0) \left(\frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right)^2 - \\ &- \delta(t - t_0) \left[2\Delta f'_\alpha \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} + \Delta f(t_0) \frac{\partial^2 t_0}{\partial \alpha^2} + \Delta f'_{t_0} \left(\frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right)^2 \right], \quad (4.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D^2 f(t, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + \delta'(t - t_0) \Delta f(t_0) \left(\frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right)^2 - \\ &- \delta(t - t_0) \left[2\Delta f'_\beta \frac{\partial t_0}{\partial \beta} + \Delta f(t_0) \frac{\partial^2 t_0}{\partial \beta^2} + \Delta f'_{t_0} \left(\frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right)^2 \right], \quad (4.44) \end{aligned}$$

где смысл всех входящих в правые части величин ясен из предыдущего. Остается вычислить вторую смешанную производную $\frac{D^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}$. Для этого продифференцируем по β формулу (18). Имеем при произвольных α, β

$$\frac{D^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{D}{\partial \beta} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) - \frac{D}{\partial \beta} \left[\Delta f(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \delta(t - t_0) \right]. \quad (4.45)$$

Но из предыдущего имеем

$$\frac{D}{\partial \beta} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} - \Delta f'_\alpha(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \delta(t - t_0(\alpha, \beta)), \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial \beta} \left[\Delta f(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \delta(t - t_0(\alpha, \beta)) \right] &= \\ &= -\Delta f(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \delta'(t - t_0(\alpha, \beta)) + \\ &+ \Delta f(t_0) \frac{\partial^2 t_0}{\partial \alpha \partial \beta} \delta(t - t_0(\alpha, \beta)) + \\ &+ \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \delta(t - t_0(\alpha, \beta)) \frac{\partial \Delta f(t_0)}{\partial \beta}. \quad (4.47) \end{aligned}$$

Но по (42)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta f(t_0) &= \frac{\partial}{\partial \beta} [f_2(t_0, \alpha, \beta) - f_1(t_0, \alpha, \beta)] = \\ &= \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \left[\frac{\partial f_2}{\partial t_0}(t_0, \alpha, \beta) - \frac{\partial f_1}{\partial t_0}(t_0, \alpha, \beta) \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial f_2}{\partial \beta}(t_0, \alpha, \beta) - \frac{\partial f_1}{\partial \beta}(t_0, \alpha, \beta) \right] = \\ &= \Delta f'_{t_0}(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \beta} + \Delta f'_\beta(t_0). \quad (4.48) \end{aligned}$$

Подставляя соотношение (46) — (48) в (45), получаем интересующую нас формулу:

$$\begin{aligned} \frac{D^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + \Delta f(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \delta'(t - t_0(\alpha, \beta)) - \\ & - \delta(t - t_0(\alpha, \beta)) \left[\Delta f(t_0) \frac{\partial^2 t_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \Delta f'_{t_0}(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. + \Delta f'_\alpha(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \beta} + \Delta f'_\beta(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Аналогичным путем можно построить и последующие члены разложения (37).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании произведения двух обобщенных функций по параметру. При этом произведение мы будем понимать в одном из двух значений, определенных в предыдущем параграфе. Пусть сначала $a(t, \alpha)$ — бесконечно дифференцируемая по t и α функция, а $F(t, \alpha)$ — обобщенная функция, зависящая от параметра α . В этом случае при каждом фиксированном значении α произведение $a(t, \alpha)f(t, \alpha)$ определяется по (3.1). В частности, аналогично формулам (3.3), (3.4) имеем

$$a(t, \alpha) \delta(t - t(\alpha)) = a(t(\alpha), \alpha) \delta(t - t(\alpha)), \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} a(t, \alpha) \delta'(t - t(\alpha)) = & a(t(\alpha), \alpha) \delta'(t - t(\alpha)) - \\ & - \frac{\partial a}{\partial t}(t(\alpha), \alpha) \delta(t - t(\alpha)). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Пример 4.1. Из формул (50), (51) вытекает, например, что

$$t \delta'(t - t(\alpha)) = t(\alpha) \delta'(t - t(\alpha)) - \delta(t - t(\alpha)). \quad (4.52)$$

Отметим теперь без доказательства, что в рассматриваемом случае справедлива формула дифференцирования по параметру, аналогичная классической:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial \alpha} [a(t, \alpha) F(t, \alpha)] = \\ = \frac{\partial a(t, \alpha)}{\partial \alpha} F(t, \alpha) + a(t, \alpha) \frac{DF(t, \alpha)}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Пример 4.2. Используя (53), легко получить, например, следующий результат:

$$\frac{D}{d\alpha} [a(t, \alpha) \operatorname{sign}(t - t(\alpha))] = \frac{\partial a(t, \alpha)}{\partial \alpha} \operatorname{sign}(t - t(\alpha)) - 2a(t(\alpha), \alpha) \delta(t - t(\alpha)) \frac{dt(\alpha)}{d\alpha}. \quad (4.54)$$

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании по параметру произведения двух обыкновенных разрывных функций.

Пусть, по аналогии с (3.8),

$$f(t, \alpha) = f_1(t, \alpha) f_2(t, \alpha), \quad (4.55)$$

причем при $t = \mu_i(\alpha)$ функция f_1 разрывна, f_2 — непрерывна, при $t = \nu_j(\alpha)$ функция f_2 разрывна, а f_1 — непрерывна, при $t = \lambda_k(\alpha)$ обе функции, f_1 и f_2 , претерпевают разрыв одновременно. Тогда, дифференцируя (55) обобщенно по α и используя (32), получаем, аналогично (3.10),

$$\begin{aligned} \frac{Df}{d\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (f_1(t, \alpha) \cdot f_2(t, \alpha)) - \\ &- \sum_i f_2(\mu_i, \alpha) \Delta f_1(\mu_i) \frac{d\mu_i}{d\alpha} \delta(t - \mu_i) - \\ &- \sum_j (f_1(\nu_j, \alpha) \Delta f_2(\nu_j)) \frac{d\nu_j}{d\alpha} \delta(t - \nu_j) - \\ &- \sum_k (f_1(\lambda_k + 0, \alpha) f_2(\lambda_k + 0, \alpha) - \\ &- f_1(\lambda_k - 0, \alpha) f_2(\lambda_k - 0, \alpha)) \frac{d\lambda_k}{d\alpha} \delta(t - \lambda_k). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Формула дифференцирования (53), аналогичная классической, в данном случае места не имеет.

Однако если функции f_1 и f_2 не имеют общих точек разрыва, то формула (56) оказывается справедливой. Это доказывается совершенно аналогично выводу формулы (3.8).

Рассмотрим также операцию интегрирования обобщенной функции по параметру. Пусть $F(t, \alpha) =$

обобщенная функция, непрерывно зависящая от параметра α . Очевидно, сумма

$$S_m = \sum_{i=1}^m F(t, \alpha_i) \Delta \alpha_i \quad (4.57)$$

также является обобщенной функцией. Тогда для любой основной функции

$$\langle S_m, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m F(t, \alpha_i) \Delta \alpha_i, \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^m q(\alpha_i) \Delta \alpha_i, \quad (4.58)$$

где, как и ранее,

$$q(\alpha_i) = \langle F(t, \alpha_i), \varphi \rangle.$$

Если при $a < \alpha < b$ и $\max \Delta \alpha_i \rightarrow 0$ существует предел правой части (58), равный $\int_a^b q(\alpha) d\alpha$, то его и называют интегралом от обобщенной функции $F(t, \alpha)$ по параметру α . Таким образом, по определению

$$\left\langle \int_a^b F(t, \alpha) d\alpha, \varphi \right\rangle = \int_a^b \langle F(t, \alpha), \varphi \rangle d\alpha. \quad (4.59)$$

Пример 4.3. Пусть, в частности, $f(t, \alpha) = \delta(t - \alpha)$, $g(t)$ — непрерывная функция параметра α . Вычислим

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \alpha) g(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha) g(\alpha) d\alpha. \quad (4.60)$$

По определению (59)

$$\begin{aligned} \langle r(t), \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta_t(t - \alpha) g(\alpha), \varphi(t) \rangle d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Сравнивая первое и последнее выражения (61), видим, что они дают функционал, определяемый функцией $g(t)$:

$$g(t) = r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha) g(\alpha) d\alpha. \quad (4.62)$$

Формула (62) широко применяется в приложениях. Изложенное выше раскрывает ее истинный смысл.

Можно показать, что обобщенную функцию, интегрируемую по параметру, можно дифференцировать под знаком интегрирования по аргументу t , т. е.

$$\frac{D^s}{dt^s} \int_a^b f(t, \alpha) d\alpha = \int_a^b \frac{D^s}{dt^s} f(t, \alpha) d\alpha. \quad (4.63)$$

§ 5. Свертка обобщенных функций

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная основная функция, F_1, F_2 — две обобщенные функции. Заменим аргумент t функции φ на $\xi + \eta$ и рассмотрим выражение

$$\langle F_{2\eta}, \varphi(\xi + \eta) \rangle = g(\xi).$$

Оно, очевидно, является функцией переменной ξ . Поэтому, применяя к функции $g(\xi)$ функционал F_1 , получим некоторое число

$$S = \langle F_{1\xi}, g(\xi) \rangle = \langle F_{1\xi}, \langle F_{2\eta}, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle. \quad (5.1)$$

В результате проделанных операций каждой основной функции φ сопоставляется число S , вычисляемое по формуле (1). Эта последовательность операций определяет некоторый функционал, который называется *сверткой обобщенных функций* F_1 и F_2 и обозначается как $F_1 * F_2$. Таким образом, по определению свертки

$$\langle F_1 * F_2, \varphi \rangle = \langle F_{1\xi}, \langle F_{2\eta}, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle. \quad (5.2)$$

Свертка двух обобщенных функций существует, если формула (1) имеет смысл для произвольной функции φ . Если последнее имеет место, то можно доказать, что

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1. \quad (5.3)$$

Для приложений весьма важно знать условия, при которых свертка двух обобщенных функций существует.

Для того чтобы сформулировать эти условия, необходимо предварительно ввести понятие носителя обобщенной функции.

Носителем обыкновенной функции называется множество значений аргумента, при которых эта функция не равна нулю. Пусть M — некоторое множество значений аргумента. Если для некоторой обобщенной функции F $\langle F, \varphi \rangle = 0$ для любой функции φ , носитель которой содержится в множестве M , то говорят (см. § 1), что обобщенная функция F равна нулю на множестве M . Наименьшее замкнутое множество, вне которого обобщенная функция F равна нулю, называется *носителем обобщенной функции F* . Пусть, например, $F(t) = \delta(t)$. Очевидно, что $\langle F, \varphi \rangle = 0$, только если $\varphi(0) = 0$. Поэтому носителем обобщенной функции $\delta(t)$ является точка $t = 0$. Аналогично, носителем $\delta(t - t_0)$ является точка t_0 . Вообще, грубо говоря, носитель обобщенной функции — это множество значений аргумента, на которое «реагирует» обобщенная функция при воздействии на основную функцию φ . Так δ -функция «реагирует» только на значения φ при $t = 0$, $\delta(t - t_0)$ — при $t = t_0$ и т. д.

Теперь можно сформулировать общую теорему [110] о существовании свертки. Пусть носителями обобщенных функций F_1 и F_2 служат соответственно A и B . Свертка $F_1 * F_2$ существует, и при этом выполняется равенство (3), если для любой постоянной $k > 0$ из условий $\xi \in A$, $\eta \in B$, $|\xi + \eta| < k$ следует $|\xi| < N$, $|\eta| < N$, где N — постоянная (зависящая от k). В практических задачах использование этого критерия существования свертки часто бывает затруднительным, и удобнее применять его частные случаи [110, 112].

А. Свертка $F_1 * F_2$ существует, если хотя бы одна из обобщенных функций F_1 или F_2 имеет ограниченный носитель. Так, свертка любой обобщенной функции с $\delta(t)$ и $\delta(t - t_0)$ всегда возможна, так как их носители состоят из одной точки и, следовательно, ограничены.

Б. Свертка $F_1 * F_2$ существует, если существует постоянная a такая, что носители F_1 и F_2 содержатся в отрезке $(a, +\infty)$, т. е. $F_1 = 0$ при $t < a$, $F_2 = 0$ при $t < a$.

Впрочем, свертка в некоторых частных случаях может существовать и тогда, когда приведенный выше критерий не выполняется.

Если одна или обе свертываемые обобщенные функции сводятся к обыкновенным функциям, выражение для свертки может быть представлено в другом виде.

Пусть f_1 и f_2 — обыкновенные интегрируемые функции, заданные на $-\infty < t < \infty$. Тогда их свертка (если она существует) будет интегрируемой функцией, определяемой формулой

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (5.4)$$

Если f_1 и f_2 удовлетворяют условию Б, т. е. $f_1(t) = f_2(t) = 0$ при $t < a$, то свертка всегда существует и (4) принимает вид

$$f_1 * f_2 = \int_a^{t-a} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_a^{t-a} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (5.5)$$

При $a = 0$ последняя формула принимает общеизвестный вид:

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (5.6)$$

Для справедливости формулы (4) в случае, когда f_1 и f_2 — обыкновенные функции, выполнение условий, накладываемых на носители, не всегда обязательно. Свертка (4), например, существует, если одна из функций абсолютно интегрируема, а другая ограничена.

Если из двух свертываемых функций одна является обыкновенной функцией, т. е. $F_1(t) = F$, $F_2 = f(t)$, то свертка является обыкновенной функцией; при этом можно доказать, что

$$(F * f)(t) = \langle F_\xi, f(t - \xi) \rangle, \quad (5.7)$$

т. е. свертка является результатом воздействия функционала F по переменной ξ на функцию $f(t - \xi)$. Если при

этом использовать обозначения вида (1.6), то формулу (7) можно представить в виде

$$F * f = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) f(t - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (5.8)$$

Впрочем, обозначение вида (8) мы иногда будем использовать и в том случае, когда обе свертываемые функции не сводятся к обыкновенным, т. е.

$$F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t - \tau) F_2(\tau) d\tau. \quad (5.9)$$

Кроме того, если выполнены соответствующие условия для носителей свертываемых обобщенных функций, то мы будем пользоваться и в общем случае аналогами формул (5), (6). Например, если $F_1 = F_2 = 0$ при $t < 0$, то

$$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t F_1(t - \tau) F_2(\tau) d\tau. \quad (5.10)$$

Рассмотрим теперь ряд важных частных случаев.

Вычислим свертку $\delta(t) * F(t)$, где F — произвольная обобщенная функция. Как уже указывалось, эта свертка всегда существует. По (2) имеем

$$\langle \delta * F, \varphi \rangle = \langle F_\eta, \langle \delta_\xi, \varphi(\eta + \xi) \rangle \rangle = \langle F, \varphi \rangle, \quad (5.11)$$

откуда следует, что

$$\delta * F = F * \delta = F, \quad (5.12)$$

т. е. по отношению к свертке δ -функция играет роль единицы. Если, в частности, F является обыкновенной функцией, то можно воспользоваться записью (8), что дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) f(t - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) f(\xi) d\xi = f(t). \quad (5.13)$$

Еще раз подчеркнем, что запись (13) имеет чисто условный характер и представляет собой особую форму соотношения (10) в рассматриваемом частном случае.

Найдем часто встречающуюся в приложениях свертку вида $\delta(t - t_0) * F$. По (2) имеем

$$\langle \delta(t - t_0) * F, \varphi \rangle = \langle F_\eta, \langle \delta_\xi(\xi - t_0), \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle;$$

но по (1.8)

$$\langle \delta_\xi(\xi - t_0), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \langle \delta_\xi, \varphi(\xi + \eta + t_0) \rangle = \varphi(\eta + t_0).$$

Поэтому

$$\langle \delta(t - t_0) * F, \varphi \rangle = \langle F_\eta, \varphi(\eta + t_0) \rangle,$$

откуда с помощью (1.12) находим

$$\delta(t - t_0) * F(t) = F(t - t_0). \quad (5.14)$$

Если $F = f$ — обыкновенная функция, то, используя запись (8), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - \xi) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - t_0) f(t - \xi) d\xi = f(t - t_0). \quad (5.15)$$

В частности, из (14) следует, что

$$\delta(t - t_0) * \delta(t - t_1) = \delta(t - t_0 - t_1), \quad (5.16)$$

или в интегральной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - t_0) \delta(t - \xi - t_1) d\xi = \delta(t - t_0 - t_1). \quad (5.17)$$

В приложениях часто встречается свертка вида $\delta^{(m)} * F$, где $\delta^{(m)}$ — m -я производная от δ -функции, определяемая соотношением (2.10). Для нее имеем

$$\langle \delta^{(m)} * F, \varphi \rangle = \langle F_\eta, \langle \delta_\xi^{(m)}, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = (-1)^m \langle F_\eta, \varphi^{(m)}(\eta) \rangle;$$

отсюда, используя (2.5), получаем, что

$$\delta^{(m)} * F = F * \delta^{(m)} = F^{(m)} = p^m F. \quad (5.18)$$

Если $F = f$ — обыкновенная функция, то последняя формула может быть представлена в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(t - \xi) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(\xi) f(t - \xi) d\xi = \frac{D^m}{dt^m} f(t). \quad (5.19)$$

Из (18) следует одно важное для приложений соотношение. Пусть $d(p)$ — полином от оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами (2.6), F — произвольная обобщенная функция; тогда

$$d(p)F = d(p)\delta * F, \quad (5.20)$$

где

$$d(p)\delta = a_0\delta^{(n)} + a_1\delta^{(n-1)} + \dots + a_n.$$

Следует подчеркнуть, что в правой части (19) стоит производная от f в смысле теории обобщенных функций.

Из (19), в частности, следует, что при кусочно-гладкой функции f

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - \xi) f(\xi) d\xi = \frac{df}{dt} + \sum_i \Delta f_i \delta(t - t_i), \quad (5.21)$$

где t_i — точки разрыва функции f , а Δf_i — соответствующие разрывы этой функции.

В ряде задач необходимо совершать некоторые операции со свертками. Рассмотрим свойства таких операций.

Прежде всего отметим, что имеет место важная формула дифференцирования свертки

$$p(F_1 * F_2) = pF_1 * F_2 = F_1 * pF_2, \quad (5.22)$$

т. е. для того, чтобы продифференцировать свертку, достаточно продифференцировать любой из свертываемых функционалов. Формула (22) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} p(F_1 * F_2) &= \delta' * (F_1 * F_2) = (\delta' * F_1) * F_2 = pF_1 * F_2, \\ p(F_1 * F_2) &= \delta' * (F_1 * F_2) = F_1 * \delta' * F_2 = F_1 * (\delta' * F_2) = \\ &= F_1 * pF_2. \end{aligned}$$

В частности, если $F_1 = F$ и $F_2 = f$ — обыкновенная функция, то

$$\begin{aligned} p \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) f(t - \xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} [pF(\xi)] f(t - \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) [pf(t - \xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Если $d(p)$ — полином от оператора дифференцирования p (2.6) с постоянными коэффициентами, то из (22) легко получить, что

$$d(p)(F_1 * F_2) = d(p)F_1 * F_2 = F_1 * d(p)F_2. \quad (5.24)$$

Можно показать также, что

$$(F_1 * F_2)(t - \tau) = F_1(t - \tau) * F_2(t) = F_1(t) * F_2(t - \tau), \quad (5.25)$$

где $\tau = \text{const.}$ Действительно, по (12) и (14) имеем, например,

$$\begin{aligned} (F_1 * F_2)(t - \tau) &= \delta(t - \tau) * F_1 * F_2 = (\delta(t - \tau) * F_1) * F_2 = \\ &= F_1(t - \tau) * F_2(t). \end{aligned}$$

Пусть F_1, F_2 — две обобщенные функции, $f(t)$ — обыкновенная функция. В случаях, рассмотренных в § 3, имеет смысл произведение $f(t)(F_1 * F_2)$.

Следует иметь в виду, что в общем случае свертка и умножение обобщенных функций не ассоциативны, т. е. выражения $(fF_1) * F_2$ и $f(F_1 * F_2)$ представляют собой различные обобщенные функции. Покажем это на примере.

Пример 5.1. Пусть $F_1 = \delta(t)$, а $F_2 = f_2(t)$ — обыкновенная функция, $f_1(t)$ — функция, непрерывная при $t = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (f_1 F_1) * F_2 &= (f_1 \delta) * f_2 = f_1(0)(\delta * f_2) = f_1(0)f_2(t), \\ f_1(F_1 * F_2) &= f_1(\delta * f_2) = f_1(t)f_2(t). \end{aligned}$$

Таким образом, в сложных выражениях, содержащих умножение и свертку обобщенных функций, необходимо четко указывать порядок выполнения определенных операций.

В приложениях встречаются также выражения, содержащие свертку нескольких обобщенных функций, например: $F_1 * F_2 * F_3$.

В общем случае свертка нескольких обобщенных функций не ассоциативна, т. е. обобщенная функции $(F_1 * F_2) * F_3$ и $F_1 * (F_2 * F_3)$ не равны. Однако имеет место следующее утверждение.

Свертка нескольких обобщенных функций заведомо определена и является ассоциативной и коммутативной в одном из следующих случаев:

а) все обобщенные функции, за исключением, может быть, одной, имеют ограниченные носители;

б) носители всех свертываемых обобщенных функций ограничены слева, т. е. расположены на луче $(a, +\infty)$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании свертки двух обобщенных функций по параметру. Пусть $F_1(t, \alpha)$, $F_2(t, \alpha)$ — две обобщенные функции, дифференцируемые по параметру α . Тогда их свертка $F_1 * F_2$, если она существует, также дифференцируема по α . При этом имеет место формула

$$\frac{D}{\partial \alpha} (F_1 * F_2) = \frac{DF_1}{\partial \alpha} * F_2 + F_1 * \frac{DF_2}{\partial \alpha}. \quad (5.26)$$

Доказательство формулы (26) следует из того факта, что если при произвольном α_0 из области дифференцируемости

$$F_1 = F_1(t, \alpha_0) + \frac{(\alpha - \alpha_0)}{1!} \frac{DF_1}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) + \dots,$$

$$F_2 = F_2(t, \alpha_0) + \frac{(\alpha - \alpha_0)}{1!} \frac{DF_2}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) + \dots,$$

то

$$F_1 * F_2 = F_1(t, \alpha_0) * F_2(t, \alpha_0) + \\ + \frac{(\alpha - \alpha_0)}{1!} \left(\frac{DF_1}{\partial \alpha} * F_2 + F_1 * \frac{DF_2}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} + \dots,$$

где точками обозначены слагаемые порядка малости выше первого относительно $(\alpha - \alpha_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{D}{\partial \alpha} (F_1 * F_2)_{\alpha=\alpha_0} = \left(\frac{DF_1}{\partial \alpha} * F_2 + F_1 * \frac{DF_2}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0},$$

откуда, в силу произвольности α_0 , и вытекает (26).

Отметим также без доказательства, что операция свертки коммутативна с операцией интегрирования по параметру [112], т. е.

$$F_1 * \int_a^b F_2(t, \alpha) d\alpha = \int_a^b (F_1 * F_2) d\alpha, \quad (5.27)$$

если обобщенная функция F_1 от α не зависит.

Установим теперь *связь между операцией свертки и интегрированием по параметру*. Это даст нам новое толкование формулы (8). Покажем, что если F — обобщенная функция, f — обыкновенная функция, то

$$F * f = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (5.28)$$

Выражение в правой части (28) имеет следующий смысл: произведение $F(t - \tau) \cdot f(\tau)$ рассматривается как обобщенная функция, зависящая от параметра τ , и интегрируется по этому параметру в смысле § 4. Для доказательства формулы (28) преобразуем выражение, стоящее в ее правой части под интегралом. Имеем

$$F(t - \tau) f(\tau) = F(t) * \delta(t - \tau) f(\tau).$$

Отсюда с учетом (27) получается

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) f(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) * \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau = \\ &= F(t) * \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Но по (4.62)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau = f(t),$$

что и дает (28).

§ 6. Преобразование Лапласа обобщенных функций

Классическое преобразование Лапласа $L[f(t)]$ для функции $f(t)$, равной нулю при $t < 0$, определяется интегралом

$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (6.1)$$

Если рассматривать функцию $f(t)$ как обобщенную, то, используя обозначение (1.6), можно написать

$$L_f(p) = L[f(t)] = \langle f_t, e^{-pt} \rangle.$$

По аналогии с этим соотношением можно формально ввести понятие *преобразования Лапласа для произвольной обобщенной функции*:

$$L_F(p) = L[F] = \langle F_t, e^{-pt} \rangle, \quad (6.2)$$

если только выражение в правой части существует. При этом используются обозначения

$$F \rightarrow L[F] = L_F(p), \quad (6.3)$$

где стрелка направлена от оригинала F к изображению по Лапласу $L[F]$. Преобразование Лапласа обобщенной функции, если оно существует, является обыкновенной функцией комплексного переменного p .

Сформулируем теперь более строго условия, при которых преобразование Лапласа заведомо существует. Для этого введем новое пространство основных функций.

Назовем *пространством J* множество комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций t , убывающих при $|t| \rightarrow \infty$ вместе с любой из своих производных быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|t|}$. По определению последовательность функций $\varphi_i \in J$ сходится к функции $\varphi \in J$, $\varphi_i \rightarrow \varphi$, если для любых целых неотрицательных чисел l, m выражение $t^l (\varphi_i^{(m)} - \varphi^{(m)})$ стремится равномерно к нулю. Теперь сформулируем без доказательства теорему 1.

Теорема 1. Пусть обобщенная функция F имеет носитель, лежащий на полуоси $t \geq 0$. Пусть, кроме того, существует число ξ_0 такое, что при $\xi > \xi_0$ обобщенная функция $e^{-\xi t} F$ является обобщенной функцией на пространстве J ; тогда F имеет преобразование Лапласа (3), определенное при $\xi > \xi_0$.

Практически проверка условий этой теоремы может оказаться сложной. К счастью, в приложениях этого обычно и не требуется. Выход из положения дает теорема 2.

Теорема 2. Для того чтобы функция комплексного переменного $L(p)$ была преобразованием Лапласа от некоторой обобщенной функции, обладающей свойствами, перечисленными в теореме 1, необходимо и достаточно, чтобы $L(p)$ существовала и была аналитической в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p = \xi > C$ и

удовлетворяла в этой полуплоскости неравенству

$$|L(p)| \leq k |p|^s, \quad (6.4)$$

где s — целое число, k — постоянная. Условие (4) заведомо выполнено, например, если

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |L(p)| = k, \quad (6.5)$$

где k — некоторая постоянная.

Таким образом, если задана обобщенная функция с носителем, расположенным на полуоси $t \geq 0$, и выражение $L_F(p) = \langle F_t, e^{-pt} \rangle$ определено и аналитично при $\operatorname{Re} p > C$, то вместо проверки второго условия теоремы 1 достаточно проверить условие (4), что обычно значительно проще.

Обратно, если аналитическая функция комплексного переменного удовлетворяет при $\xi > C$ неравенству (4), то она является преобразованием Лапласа от обобщенной функции со свойствами, указанными в теореме 1. Следует подчеркнуть, что сказанное подразумевает под изображением $L(F)$ именно аналитическую функцию p , определенную при $\operatorname{Re} p > C$. Для определения $L_F(p)$ при $\operatorname{Re} p < C$ следует воспользоваться принципом аналитического продолжения, что определит функцию $L_F(p)$ везде, за исключением особых точек.

Приведем некоторые примеры вычисления преобразования Лапласа.

Пример 6.1. Если $f(t)$ — интегрируемая функция, равная нулю при $t < 0$, то ее преобразование Лапласа в классическом смысле совпадает с преобразованием Лапласа от обобщенной функции $f(t)$. Это непосредственно вытекает из (3) и (1).

Пример 6.2. Если $F = \delta(t)$, то по (3)

$$L[\delta(t)] = \langle \delta(t), e^{-pt} \rangle = 1,$$

т. е.

$$\delta(t) \rightarrow 1. \quad (6.6)$$

Аналогично

$$L[\delta^{(m)}(t)] = \langle \delta^{(m)}(t), e^{-pt} \rangle = (-1)^m \langle \delta(t), \frac{d^m}{dt^m} e^{-pt} \rangle = p^m,$$

т. е.

$$\delta^{(m)}(t) \rightarrow p^m. \quad (6.7)$$

Пример 6.3. Пусть $L_F(p) \leftarrow F(t)$. Найдем изображение производной $\frac{DF}{dt}$. Имеем, учитывая (2.3),

$$L\left[\frac{DF}{dt}\right] = \left\langle \frac{DF}{dt}, e^{-pt} \right\rangle = - \left\langle F, \frac{d}{dt} e^{-pt} \right\rangle = p \langle F, e^{-pt} \rangle,$$

т. е.

$$L\left[\frac{DF}{dt}\right] = pL[F(t)]. \quad (6.8)$$

Пример 6.4. Пусть $L_F(p) \leftarrow F(t)$. Найдем преобразование Лапласа от обобщенной функции $F(t-a)$, $a > 0$. По (1.12) имеем

$$\begin{aligned} L[F(t-a)] &= \langle F(t-a), e^{-pt} \rangle = \langle F(t), e^{-p(t+a)} \rangle = \\ &= e^{-pa} \langle F, e^{-pt} \rangle, \end{aligned}$$

откуда

$$L[F(t-a)] = e^{-pa} L[F(t)]. \quad (6.9)$$

Пример 6.5. Найдем изображение свертки двух обобщенных функций $F_1 * F_2$. По определению

$$\begin{aligned} L(F_1 * F_2) &= \langle F_1 * F_2, e^{-pt} \rangle = \langle F_{2\eta}, \langle F_{1\xi}, e^{-p(\xi+\eta)} \rangle \rangle = \\ &= \langle F_{2\eta}, e^{-p\eta} \rangle \cdot \langle F_{1\xi}, e^{-p\xi} \rangle = L[F_1] \cdot L[F_2]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Из приведенных примеров следует, что преобразование Лапласа от обобщенных функций внешне аналогично классическому, хотя смысл, который вкладывается в конкретные операции, естественно, другой. Поэтому читатель, знакомый с классическим операционным исчислением, практически без изменений может использовать операционное исчисление обобщенных функций. При этом следует помнить, что если $f(t)$ — обычная функция, то ее преобразование Лапласа как обобщенной функции совпадает с классическим.

Рассмотрим теперь коротко вопрос о вычислении обратного преобразования Лапласа. Если $f(t)$ — обыкновенная функция, $F(p) = L[f(t)]$, то, как известно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (6.11)$$

причем постоянная C такова, что при $\operatorname{Re} p > C$ функция $F(p)$ аналитична. Покажем, что к вычислению интеграла

вида (11) можно свести и задачу об определении обобщенной функции по ее изображению.

Действительно, пусть теперь $f(t)$ — обобщенная функция и ее преобразование Лапласа $F(p)$ удовлетворяет при $\operatorname{Re} p > C$ условию (4), причем

$$F(p) \leq k |p|^s, \quad s \geq 0; \quad (6.12)$$

тогда функция $R(p) = \frac{F(p)}{p^{s+2}}$ удовлетворяет неравенству

$$|R(p)| = \frac{|F(p)|}{|p^{s+2}|} \leq \frac{k}{|p|}, \quad k = \text{const}, \quad \operatorname{Re} p > C. \quad (6.13)$$

Но из теории классического преобразования Лапласа [27] и условия (13) следует, что функция $R(p)$ является изображением по Лапласу обыкновенной функции $r(t)$, причем функция $r(t)$ непрерывна и

$$r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{F(p)}{p^{s+2}} e^{pt} dp. \quad (6.14)$$

Но, с другой стороны, $p^{s+2}R(p) = F(p)$, поэтому

$$\frac{D^{s+2}}{dt^{s+2}} r(t) = f(t). \quad (6.15)$$

Пример 6.6. Пусть, например, $F(p) = 1$; тогда $R(p) = \frac{1}{p^2}$ и, в соответствии с известной формулой классического преобразования Лапласа,

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t > 0. \end{cases}$$

Дифференцируя обобщенно функцию $r(t)$, имеем

$$\frac{Dr(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad \frac{D^2r(t)}{dt^2} = \delta(t),$$

что согласуется с (6).

В дальнейшем всегда обратное преобразование Лапласа любой обобщенной функции будем записывать в виде (11). Однако если $f(t)$ не сводится к обыкновенной функции, то формула (11) будет подразумевать приведенную выше процедуру вычисления,

§ 7. Периодические обобщенные функции

Обыкновенная функция $f(t)$ называется *периодической периода T* , если сдвиг аргумента на величину T не изменяет этой функции, т. е.

$$f(t - T) = f(t). \quad (7.1)$$

По аналогии с этим определением обобщенная функция $F(t)$ называется *T -периодической*, если ее сдвиг $F(t - T)$, определенный формулой (1.12), совпадает с F , т. е.

$$\langle F(t - T), \varphi \rangle = \langle F, \varphi(t + T) \rangle = \langle F, \varphi \rangle. \quad (7.2)$$

Если соотношение (2) справедливо, то мы по аналогии с (1) имеем

$$F(t) = F(t - T). \quad (7.3)$$

Все свойства периодической функции (1) определяются ее значениями на отрезке $[a, a + T]$, где a — любая постоянная. Поэтому можно вместо изучения периодической функции, заданной при значениях аргумента $-\infty < t < \infty$, ограничиться более простым рассмотрением функции, заданной на отрезке длины T , а потом полученный результат распространить периодически на всю числовую ось.

Аналогичную идею можно провести и для обобщенных функций. Для этого будем трактовать аргумент t как длину дуги на окружности S длиной T , так что точки t и $t + T$ совпадают. В качестве основных функций на окружности S будем рассматривать множество $\mathcal{D}_T$ бесконечно дифференцируемых функций φ таких, что $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(T)$. То есть, по существу, функции φ — это бесконечно дифференцируемые в классическом смысле функции периода T .

По определению $\varphi_i \rightarrow \varphi$ на окружности S , если все последовательности $\varphi_i^{(s)}$ равномерно сходятся к $\varphi^{(s)}$. Тогда обобщенными функциями на окружности S будут линейные функционалы, такие, что $\langle F, \varphi_i \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$, если только $\varphi_i \rightarrow \varphi$ в указанном выше смысле.

Пусть теперь $\tilde{f}(t)$ — обыкновенная функция, заданная и интегрируемая на окружности S и совпадающая при

$0 < t < T$ с функцией (1). Тогда функция $\tilde{f}(t)$ определяет на S обобщенную функцию по формуле

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_0^T \tilde{f}(t) \varphi(t) dt. \quad (7.4)$$

Покажем, как можно, имея обобщенную функцию $\tilde{f}(t)$, заданную равенством (4) на окружности S , определить соответствующую периодическую функцию (1), заданную при $-\infty < t < \infty$. Для любой функции $\varphi(t) \in D$ и периодической функции $f(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) \varphi(t) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T f(t) \varphi(t + kT) dt. \end{aligned}$$

Но $f(t) = \tilde{f}(t)$ при $0 < t < T$. Поэтому предыдущее соотношение можно представить в виде

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T \tilde{f}(t) \Phi(t) dt, \quad (7.5)$$

где

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t + kT). \quad (7.6)$$

Соотношения (5) с учетом (4) можно переписать в виде

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \tilde{f}, \Phi \rangle, \quad (7.7)$$

что и считается определением периодической функции $\tilde{f}(t)$.

По аналогии с (7), если задана обобщенная функция $\tilde{F}$ на окружности S , то соответствующая периодическая обобщенная функция на оси t определяется равенством

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle \tilde{F}, \Phi \rangle, \quad (7.8)$$

где Φ — функция (6). Если подставить (6) в (8), то получим также

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \tilde{F}, \varphi(t + kT) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \tilde{F}(t - kT), \varphi \rangle, \quad (7.9)$$

что эквивалентно следующему:

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(t - kT). \quad (7.10)$$

Каждой заданной и интегрируемой на отрезке $[0, T]$ функции $\tilde{f}(t)$ может быть сопоставлен ее ряд Фурье

$$\tilde{f} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ki\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (7.11)$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(\tau) e^{-ki\omega\tau} d\tau. \quad (7.12)$$

Если воспользоваться записью (4), то последняя формула примет вид

$$C_k = \frac{1}{T} \langle \tilde{f}_t, e^{-ki\omega t} \rangle. \quad (7.13)$$

Естественно по аналогии с этими понятиями ввести ряд Фурье для произвольной обобщенной функции, заданной на окружности:

$$\tilde{F} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ki\omega t}, \quad (7.14)$$

где коэффициенты Фурье C_k определяются соотношением

$$C_k = \frac{1}{T} \langle \tilde{F}_t, e^{-ki\omega t} \rangle. \quad (7.15)$$

В дальнейшем ряд Фурье обобщенной функции $\tilde{F}$ (14) мы также будем называть рядом Фурье периодической обобщенной функции F , определяемой формулой (10).

Известно, что ряд Фурье не обязан сходиться к функции $\tilde{f}(t)$ в классическом смысле, даже если $\tilde{f}(t)$ — непрерывная функция.

Совсем иное положение в теории обобщенных функций. Можно доказать, что ряд Фурье любой периодической обобщенной функции сходится в смысле определения § 4. Вспоминая определение сходимости, данное в § 4, сказанное можно сформулировать так.

Пусть $\tilde{F}_n = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ki\omega t}$ — частичная сумма ряда Фурье (14) периодической обобщенной функции F ; тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{F}_n, \varphi \rangle = \langle \tilde{F}, \varphi \rangle \quad (7.16)$$

или, что то же самое,

$$\lim \int_0^T \tilde{F}_n(t) \varphi(t) dt = \langle \tilde{F}, \varphi \rangle. \quad (7.17)$$

В частности, ряд Фурье любой периодической интегрируемой функции сходится к ней в смысле теории обобщенных функций.

На практике часто возникает вопрос о том, является ли данный формальный тригонометрический ряд

$$R = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ki\omega t}, \quad (7.18)$$

рядом Фурье от некоторой обобщенной функции.

Ответом на этот вопрос является следующий простой признак. Для того чтобы ряд вида (18) являлся рядом Фурье периодической обобщенной функции, необходимо и достаточно существование такого $\alpha \geq 0$, что для всех k выполнено неравенство

$$|C_k| < Ak^\alpha, \quad (7.19)$$

где A — постоянная. Как видно из (19), к обобщенным функциям относится очень широкий класс тригонометрических рядов, в том числе многие ряды с возрастающими коэффициентами C_k .

С рядами Фурье периодических обобщенных функций обычным путем можно проводить операции сложения и умножения на число.

Рассмотрим некоторые особенности операции дифференцирования рядов Фурье обобщенных функций. Прежде всего, в силу возможности почленного дифференцирования сходящихся рядов из обобщенных функций, можно утверждать, что ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k (ki\omega)^m e^{ki\omega t}, \quad (7.20)$$

полученный из (14) m -кратным почленным дифференцированием, сходится к обобщенной функции $\tilde{F}^{(m)} = \frac{D^m \tilde{F}}{dt^m}$.

Приведем теперь некоторые важные примеры периодических обобщенных функций.

Пример 7.1. На окружности S можно определить δ -функцию, т. е. функционал, действующий на основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}_T$, по известной формуле

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (7.21)$$

Тогда соответствующая периодическая функция, которая обозначается через $f = \delta_T(t)$, определится в соответствии с (7) следующим образом:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \delta, \Phi \rangle = \Phi(0) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \varphi(kT), \quad (7.22)$$

откуда следует, что

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (7.23)$$

С физической точки зрения $\delta_T(t)$ — это периодическая последовательность бесконечных мгновенных импульсов, имеющая период T . Построим ряд Фурье периодической обобщенной функции (23). Используя (15), находим

$$C_k = \frac{1}{T} \langle \delta, e^{-ki\omega t} \rangle = \frac{1}{T}, \quad (7.24)$$

откуда следует, что разложение функции $\delta_T(t)$ в ряд Фурье имеет вид

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega t}. \quad (7.25)$$

Можно также пользоваться вещественной формой ряда (25):

$$\delta_T(t) = \frac{2}{T} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega t \right). \quad (7.26)$$

$$\frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt} + \sum_{s=1}^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta f(t_{sk}) \delta(t - t_{sk}). \quad (7.32)$$

В силу периодичности функции $f(t)$

$$\Delta f(t_{st}) = \Delta f(t_{sj}) = \Delta f_s. \quad (7.33)$$

Поэтому из (32) получаем

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} &= \frac{df}{dt} + \sum_{s=1}^m \Delta f_s \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_s - kT) \right) = \\ &= \frac{df}{dt} + \sum_{s=1}^m \Delta f_s \delta_T(t - t_s), \end{aligned} \quad (7.34)$$

где использовано обозначение (23). Сравнивая (32) и (34), имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(ki\omega) e^{ki\omega t} = \frac{df}{dt} + \sum_{s=1}^m \Delta f_s \delta_T(t - t_s), \quad (7.35)$$

откуда также следует, что

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(ki\omega) e^{ki\omega t} - \sum_{s=1}^m \Delta f_s \delta_T(t - t_s). \quad (7.36)$$

Продолжая дифференцирование, с помощью таких же рассуждений устанавливаем:

$$\begin{aligned} \frac{D^2 f}{dt^2} &= \frac{d^2 f}{dt^2} + \sum_{s=1}^m \Delta f_s \delta'_T(t - t_s) + \sum_{s=1}^{m'} \Delta f'_s(t'_s) \delta_T(t - t'_s) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(ki\omega)^2 e^{ki\omega t}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

где t'_s — точки разрыва производной $\frac{df}{dt}$ такие, что $0 \leq t'_s < T$, $\Delta f'_s$ — величины соответствующих разрывов. Аналогичным путем устанавливается общая формула

$$\begin{aligned} \frac{D^n f}{dt^n} &= \frac{d^n f}{dt^n} + \sum_{s=1}^m \Delta f_s \delta_T^{(n-1)}(t - t_s) + \\ &+ \sum_{s=1}^{m'} \Delta f'_s(t'_s) \delta_T^{(n-2)}(t - t'_s) + \dots \\ &\dots + \sum_{s=1}^{m^{(n-1)}} \Delta f_s^{(n-1)}(t_s^{(n-1)}) \delta_T(t - t_s^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (7.38)$$

где $t_s^{(l)}$ — точки разрыва обыкновенной производной $\frac{d^l f}{dt^l}$, $\Delta f_s^{(l)}$ — величины соответствующих разрывов, $m^{(l)}$ — число точек разрыва производной $\frac{d^l f}{dt^l}$.

Перейдем теперь к рассмотрению *свертки двух обобщенных периодических функций*.

По аналогии с определением § 5 свертка двух обобщенных функций $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$, заданных на окружности S , определяется формулой

$$\langle (\tilde{F}_1 * \tilde{F}_2), \varphi \rangle = \langle \tilde{F}_2 \eta, \langle \tilde{F}_1 \xi, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle, \quad (7.39)$$

где φ — любая основная функция на окружности S . Свертка (39) всегда существует, поскольку носители $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ ограничены, и представляет собой обобщенную функцию на S .

Пусть теперь F_1 и F_2 — периодические обобщенные функции, совпадающие при $0 < t < T$ с $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$. Их сверткой $F_1 * F_2$ будем называть периодическое продолжение на ось $-\infty < t < \infty$ свертки $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$. Следует подчеркнуть, что данное определение свертки обобщенных функций F_1 и F_2 не имеет ничего общего с понятием свертки, приведенным в § 5. Например, для двух обыкновенных периодических функций f_1 и f_2 свертка в смысле § 5 превращается в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau.$$

и, вообще говоря, не существует. В смысле же данного определения свертки сверткой $f_1 * f_2$ является периодическая функция

$$\int_a^{a+T} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_a^{a+T} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad (7.40)$$

где a — произвольное число. При этом, в отличие от свертки, определенной в § 5, свертка двух периодических функций всегда имеет смысл. В дальнейшем мы для

свертки двух периодических функций сохраним обозначение, аналогичное (40), т. е.

$$F_1 * F_2 = \int_a^{a+T} F_1(t - \tau) F_2(\tau) d\tau, \quad (7.41)$$

где a — любая константа.

Вычислим теперь коэффициенты Фурье C_k свертки двух периодических функций

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{1k} e^{ki\omega t}, \\ F_2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} e^{ki\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

По (15) и (41) имеем

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \langle \tilde{F}_1 * \tilde{F}_2, e^{-ki\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \langle \tilde{F}_{2\eta}, \langle \tilde{F}_{1\xi}, e^{-ki\omega(\eta+\xi)} \rangle \rangle = \\ &= \frac{1}{T} \langle \tilde{F}_{2\eta}, e^{-ki\omega\eta} \rangle \langle \tilde{F}_{1\xi}, e^{-ki\omega\xi} \rangle = TC_{1k} \cdot C_{2k}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

т. е. свертка обобщенных функций (42) дается рядом Фурье

$$F_1 * F_2 = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{1k} \cdot C_{2k} e^{ki\omega t}. \quad (7.44)$$

Поэтому операцию свертки периодических функций можно понимать как операцию перехода от рядов Фурье (42) к ряду (44).

Пример 7.3. Вычислим свертки некоторых периодических обобщенных функций. Пусть $F_1 = \delta_T$, $F_2 = F(t) = F(t+T)$. Тогда по (44) и (25) имеем

$$\delta_T * F = F * \delta_T = F. \quad (7.45)$$

Совершенно аналогично с помощью (29) и (44) показывается, что

$$\delta'_T * F = F * \delta'_T = \frac{DF}{dt}$$

и вообще

$$\delta_T^{(m)} * F = F * \delta_T^{(m)} = \frac{D^m F}{dt^m}. \quad (7.46)$$

§ 8. Уравнения в свертках

Во многих задачах часто встречаются уравнения, где искомые функции входят под знаком свертки. Уравнения такого типа называются *уравнениями в свертках* и имеют многочисленные практические приложения. В настоящем параграфе рассматриваются некоторые простейшие уравнения такого типа и методы их решения.

Простейшим уравнением в свертках является уравнение

$$A * X = B, \quad (8.1)$$

где A и B — заданные, X — искомая обобщенные функции. В общем случае уравнения вида (1) могут иметь множество решений, и всегда требуется из этого множества выбрать те или иные решения, обладающие интересующими исследователя свойствами. Однако важный класс решений может быть получен следующим образом. Пусть существует обобщенная функция X^* , удовлетворяющая уравнению

$$A * X^* = \delta \quad (8.2)$$

и такая, что существует и ассоциативна свертка

$$A * (X^* * B) = (A * X^*) * B. \quad (8.3)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$X = X_0 + X^* * B, \quad (8.4)$$

где X_0 — произвольное решение однородного уравнения

$$A * X_0 = 0.$$

Для доказательства сказанного свернем обобщенную функцию (4) с A . С учетом (2), (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} A * X &= A * X_0 + A * (X^* * B) = \\ &= (A * X^*) * B = \delta * B = B, \end{aligned} \quad (8.5)$$

что и требовалось показать.

Если обобщенная функция X^* с указанными свойствами существует, то решений, отличных от (4), уравнение (1) не имеет. Возможны, однако, случаи, когда (2) не имеет решения, а уравнение (1) при некоторых B все же его имеет.

Другой способ решения уравнений в свертках основан на использовании преобразования Лапласа. Если A и B имеют преобразование Лапласа соответственно $L[A]$ и $L[B]$, то, предположив, что X также имеет преобразование по Лапласу, и используя (6.10), находим из (1)

$$L[A] L[X] = L[B],$$

т. е.

$$L[X] = \frac{L[B]}{L[A]}. \quad (8.6)$$

Если отношение в правой части (6) является преобразованием Лапласа, то соответствующий оригинал даст решение X , которое будет единственным решением уравнения (1), имеющим преобразование Лапласа в смысле § 6.

Рассмотрим, наконец, другой специальный случай, когда обобщенные функции A и B — периодические:

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{k i \omega t}, \quad B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{k i \omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (8.7)$$

а искомая обобщенная функция X также является периодической:

$$X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{k i \omega t}. \quad (8.8)$$

В этом случае для определения коэффициентов Фурье x_k можно воспользоваться формулой (7.43):

$$T(a_k \cdot x_k) = b_k. \quad (8.9)$$

Если все $a_k \neq 0$, то из (9) имеем

$$x_k = \frac{1}{T} \frac{b_k}{a_k} \quad (8.10)$$

и

$$X = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{a_k} e^{k i \omega t}. \quad (8.11)$$

При этом выражение (11) будет искомой обобщенной периодической функцией, если выполнено условие (7.19), т. е.

$$\left| \frac{b_k}{a_k} \right| < A k^a. \quad (8.12)$$

Предположим теперь, что для некоторого множества $\mathcal{K}_p$ значений k $a_k = a_{-k} = 0$. Тогда, если не выполнены равенства

$$b_k = b_{-k} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathcal{K}_p, \quad (8.13)$$

то уравнения (9) неразрешимы и исходное уравнение (1) не имеет периодического решения. Если же равенства (13) имеют место, то легко убедиться, что выражение

$$X = \sum_{k \in \mathcal{K}_p} c_k e^{ki\omega t} + \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \notin \mathcal{K}_p}}^{\infty} \frac{b_k}{a_k} e^{ki\omega t}, \quad (8.14)$$

где c_k — произвольные постоянные, является периодическим решением уравнения (1) и обобщенной функцией, если при всех $k \notin \mathcal{K}_p$ выполнено условие (12). Обозначение $k \notin \mathcal{K}_p$ означает, что при суммировании опускаются значения k , принадлежащие множеству $\mathcal{K}_p$.

Вводные замечания

Каждую систему автоматического управления можно рассматривать как преобразователь входных сигналов в выходные. Поэтому математическим описанием такой системы является совокупность действий, с помощью которых данному входному сигналу $x_{\text{вх}}(t)$ сопоставляется выходной сигнал $x_{\text{вых}}(t)$. Если связь между входом и выходом однозначна, то эту совокупность действий можно символически записать в виде

$$x_{\text{вых}}(t) = U[x_{\text{вх}}(t)], \quad (0.1)$$

где U — оператор системы. Строгое задание оператора (1) требует не только детального описания составляющих его математических операций, но и класса входных сигналов, над которыми эти операции производятся.

Многие реальные системы с достаточной степенью приближения описываются *линейными операторами*, т. е. такими операторами, для которых справедливо равенство

$$U(\alpha x_{1\text{ вх}} + \beta x_{2\text{ вх}}) = \alpha U(x_{1\text{ вх}}) + \beta U(x_{2\text{ вх}}) \quad (0.2)$$

при любых допустимых входных сигналах $x_{1\text{ вх}}(t)$, $x_{2\text{ вх}}(t)$ и любых постоянных α и β .

Примерами звеньев, описываемых линейными операторами, являются: идеальный усилитель

$$x_{\text{вых}} = U_1(x_{\text{вх}}) = \alpha x_{\text{вх}}; \quad (0.3)$$

дифференцирующее звено

$$x_{\text{вых}} = U_2(x_{\text{вх}}) = \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}; \quad (0.4)$$

интегрирующее звено

$$x_{\text{вых}} = U_3(x_{\text{вх}}) = \int_0^t x_{\text{вх}}(\tau) d\tau \quad (0.5)$$

и др. При этом, строго говоря, в соотношении (4) следует рассматривать только дифференцируемые входные сигналы, а в (5) — интегрируемые.

Линейные операторы удобно аналитически задавать некоторыми специальными функциями, характеризующими их воздействие на типовые входные сигналы. Важнейшими из таких способов задания линейного оператора (2) являются его *весовая функция*

$$h(t, \tau) = U[\delta(t - \tau)] \quad (0.6)$$

и *передаточная функция*

$$W(p, t) = e^{-pt} U(e^{pt}). \quad (0.7)$$

При этом соотношение (7) рассматривается только при тех значениях комплексного переменного p , при которых имеет смысл выражение $U(e^{pt})$. Для линейных операторов (3), (4) в соответствии с (7) имеем выражения для передаточных функций:

$$W_1(p, t) = \alpha, \quad W_2(p, t) = p. \quad (0.8)$$

В случае (5)

$$W_3(p, t) = e^{-pt} \int_0^t e^{p\tau} d\tau = \frac{1}{p} (1 - e^{-pt}). \quad (0.9)$$

Передаточные функции (8), (9) определены при всех p . При этом $W_1(p, t)$, $W_2(p, t)$ фактически от t не зависят. Это обстоятельство не является случайным, а определяется принадлежностью операторов (3), (4) к одному важному классу операторов, называемых *стационарными*.

Для стационарных операторов справедливо соотношение

$$e^{-pt} U(e^{pt}) = W(p), \quad (0.10)$$

т. е. передаточные функции зависят только от p . Линейные операторы, передаточные функции которых зависят от t , называются *нестационарными*. Из (9) следует, что оператор (5) — нестационарный. На первый взгляд этот вывод противоречит существующим представлениям.

Однако это противоречие кажущееся. Линейный стационарный оператор определяет выражение

$$x_{\text{вых}} = U_4(x_{\text{вх}}) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{вх}}(\tau) d\tau. \quad (0.11)$$

Действительно, в этом случае, полагая, что

$$\operatorname{Re} p > 0, \quad (0.12)$$

имеем

$$W_4(p, t) = e^{-pt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{p\tau} d\tau = \frac{1}{p} = W_4(p). \quad (0.13)$$

При этом условие (12) введено для сходимости несобственного интеграла в (13). Нестационарный оператор (5) совпадает со стационарным оператором (11) на входных сигналах, удовлетворяющих условию

$$x_{\text{вх}}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Для произвольных линейных операторов дать содержательную теорию в общем случае затруднительно. В настоящей книге основное внимание уделяется *линейным периодическим* (T -периодическим) операторам, для которых справедливо соотношение

$$W(p, t) = W(p, t + T), \quad (0.14)$$

где период T предполагается не зависящим от p . В последующем изложении показывается, что линейными периодическими операторами описываются многие практически важные классы систем управления. При этом далее рассматривается конкретный, хотя и весьма общий класс линейных периодических операторов, характеризуемый двумя основными признаками.

1) Входные сигналы считаются принадлежащими к классу обобщенных функций (гл. I).

2) Аналитическая запись оператора имеет вид

$$x_{\text{вых}} = U(x_{\text{вх}}) = \sum_k a_k(t) (h_k * x_{\text{вх}}), \quad (0.15)$$

где h_k — заданные обобщенные функции, $a_k(t) = a_k(t + T)$ — обыкновенные периодические функции и

выражение $h_k * x_{\text{вх}}$ означает свертку обобщенных функций h_k и $x_{\text{вх}}$ (см. § 5 гл. I).

На первый взгляд может показаться, что такой способ описания реальных автоматических систем является излишне абстрактным и формальным. Однако более тщательное рассмотрение показывает, что это не так, и существует ряд веских обстоятельств, говорящих в пользу такого подхода.

Покажем, что многие практические задачи связаны именно с рассмотрением операторов указанного класса. Прежде всего, уже само определение весовой функции (6) требует распространения оператора системы на входные сигналы, являющиеся обобщенными функциями. Другое серьезное обстоятельство проиллюстрируем на примере. Предположим, что связь между входом и выходом системы дается уравнением

$$\frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} - (a + b) \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + abx_{\text{вых}} = c \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}, \quad (0.16)$$

где a , b , c — вещественные постоянные. Формально это уравнение имеет смысл только при дифференцируемых входных сигналах. Поэтому с формальной точки зрения уравнение (16) в случае, когда

$$x_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad (0.17)$$

не имеет смысла. Однако если рассматривать вместо уравнения (16) линейное стационарное звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{cp}{p^2 - (a + b)p + ab},$$

то реакция системы (16) на входное воздействие (17) может быть вычислена и физически реализована. Это кажущееся противоречие устраняется, если заметить, что фактически процедура решения уравнения (16) не связана с дифференцированием входного сигнала. Действительно, общее решение уравнения

$$\frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} - (a + b) \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + abx_{\text{вых}} = f(t)$$

имеет вид

$$x_{\text{вых}} = c_1 e^{at} + c_2 e^{bt} + \frac{1}{a-b} \int_0^t [e^{a(t-\tau)} - e^{b(t-\tau)}] f(\tau) d\tau,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Если подставить сюда $f(t) = c \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}$, то после интегрирования по частям получим общее решение уравнения (16):

$$x_{\text{вых}} = d_1 e^{at} + d_2 e^{bt} + \frac{c}{a-b} \int_0^t [ae^{a(t-\tau)} - be^{b(t-\tau)}] x_{\text{вх}}(\tau) d\tau \quad (0.18)$$

(где d_1, d_2 — новые произвольные постоянные), которое имеет, в частности, смысл и в случае (17). На практике, однако, переход к соотношениям типа (18) может оказаться достаточно сложным, и возникает задача так расширить трактовку исходного уравнения (16), чтобы допустить его рассмотрение и при недифференцируемых входных сигналах. Одним из способов решения этой задачи является переход от уравнения (16) к уравнению в обобщенных функциях

$$p^2 x_{\text{вых}} - (a+b) p x_{\text{вых}} + ab x_{\text{вых}} = c p x_{\text{вх}}, \quad (0.19)$$

где p — оператор обобщенного дифференцирования (см. § 2 гл. I). При такой трактовке указанные выше затруднения отпадают. В частности, при входном сигнале вида (17) имеем, в соответствии с (I. 2.20),

$$p x_{\text{вх}} = \delta(t). \quad (0.20)$$

При этом легко убедиться, что общее решение уравнения (19) совпадает с (18).

Поясним также целесообразность перехода к операциям свертки. Прежде всего, это дает изложению определенную общность, ибо, как это показано ниже, к частным случаям оператора свертки сводятся многие типы линейных математических операций. Помимо этого, оказывается, что без перехода к операции свертки вообще затруднительно описать воздействие даже некоторых простейших линейных операторов на обобщенные входные сигналы. Такое положение, как показано в гл. IV,

возникает, например, при описании линейных амплитудно-импульсных элементов.

В последующем изложении подробно изучаются общие свойства линейных периодических операторов типа (15), а также разомкнутых и замкнутых систем, составленных из таких операторов.

Первые три параграфа главы посвящены рассмотрению систем управления, которые описываются стационарными операторами типа свертки. Наряду с передаточными и весовыми функциями здесь вводятся в рассмотрение импульсно-частотные характеристики (ИЧХ) и смещенные импульсно-частотные характеристики (СИЧХ), связанные с реакцией оператора на периодическую последовательность δ -функций.

В §§ 3—7 приводятся общие соотношения теории линейных периодических систем, указываются правила построения передаточных функций сложных систем по передаточным функциям элементов и устанавливается связь между различными основными характеристиками.

Параграфы 8 и 9 содержат изложение общих приемов построения переходных процессов и исследования устойчивости. В последнем, десятом, параграфе изложенный материал переносится на многомерные системы.

§ 1. Линейные стационарные операторы типа свертки

В теории автоматического управления принято представлять системы регулирования в виде некоторого соединения элементов направленного действия. *Элементом направленного действия* называют динамическую систему, имеющую вход и выход, причем предполагается, что выходная координата $x_{\text{вых}}$ на входную координату $x_{\text{вх}}$ не влияет. Математическим описанием элемента направленного действия обычно является некоторое уравнение, например дифференциальное, интегральное и т. д.

В тех случаях, когда между входом и выходом элемента имеется однозначная связь, его математическим описанием является оператор, т. е. математическое правило, позволяющее вычислить $x_{\text{вых}}$, если известно $x_{\text{вх}}$. Символически это записывается в виде

$$x_{\text{вых}}(t) = U[x_{\text{вх}}(t)], \quad (1.1)$$

где U — оператор элемента, t — аргумент, который в дальнейшем будем называть временем. При этом полное задание элемента (1) требует не только описания математического правила U , но и четкого определения класса функций, которыми могут описываться входные сигналы.

Элемент, имеющий уравнение (1), называется *линейным*, если оператор U линеен, т. е. если для любых допустимых входных сигналов $x_{1\text{ вх}}$, $x_{2\text{ вх}}$ и любых постоянных α_1 и α_2 имеем

$$U(\alpha_1 x_{1\text{ вх}} + \alpha_2 x_{2\text{ вх}}) = \alpha_1 U(x_{1\text{ вх}}) + \alpha_2 U(x_{2\text{ вх}}). \quad (1.2)$$

В дальнейшем изложении, не оговаривая каждый раз особо, мы будем считать, что входные воздействия относятся к классу обобщенных функций, и рассматривать только линейные элементы, операторы которых такие входные сигналы преобразуют снова в обобщенные функции. При этом обыкновенные интегрируемые функции рассматриваются как обобщенные.

Включение в рассмотрение сигналов, являющихся обобщенными функциями, вызвано не только и не столько желанием достичь общности изложения, сколько существом дела, так как многие задачи и понятия автоматического управления требуют именно такой трактовки.

Например, в уравнения многочисленных элементов и систем управления входят дифференциальные выражения вида

$$x_{\text{вых}} = U(x_{\text{вх}}) = b_0 \frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x_{\text{вх}}, \quad (1.3)$$

где b_i — постоянные. С классической точки зрения выражение (3) имеет смысл только в том случае, когда функция $x_{\text{вх}}(t)$ дифференцируема в обычном смысле m раз. Между тем во многих задачах $x_{\text{вх}}$ не удовлетворяет этому требованию и является разрывной функцией t , например функцией единичного скачка. Поэтому целесообразно считать $x_{\text{вх}}$ обобщенной функцией, а операцию дифференцирования понимать в смысле теории обоб-

щенных функций. При этом уравнение (3) запишется в виде

$$x_{\text{вых}} = U(x_{\text{вх}}) = b_0 \frac{D^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + \dots + b_m x_{\text{вх}} = b(p) x_{\text{вх}}, \quad (1.4)$$

где

$$b(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m \quad (1.5)$$

— полином от оператора обобщенного дифференцирования $p = \frac{D}{dt}$. В том частном случае, когда $x_{\text{вх}}(t)$ дифференцируема в классическом смысле нужное число раз, уравнение (4) сводится к уравнению (3).

Одним из важнейших понятий теории автоматического управления является понятие *весовой функции* (или *импульсной характеристики линейного оператора*).

Весовой функцией $h(t, \tau)$ линейного элемента вида (1) называется его реакция на входной сигнал вида $x_{\text{вх}} = \delta(t - \tau)$, т. е.

$$h(t, \tau) = U[\delta(t - \tau)]. \quad (1.6)$$

Таким образом, в данном случае входной сигнал является обобщенной функцией и оператор U определяет некоторое математическое правило над пространством обобщенных функций. Отсюда вытекает, что строгое определение понятия весовой функции требует, вообще говоря, привлечения аппарата обобщенных функций. С многочисленными примерами такого рода мы еще столкнемся в дальнейшем изложении.

Другой важной характеристикой линейного оператора является его передаточная функция.

Передаточной функцией линейного оператора (1) будем называть выражение

$$W(p, t) = e^{-pt} U(e^{pt}), \quad (1.7)$$

если только выражение в правой части существует. В общем случае передаточная функция линейного оператора является функцией двух аргументов — p и t . Из определения (7) следует, что если линейный оператор U имеет передаточную функцию, то

$$U(e^{pt}) = e^{pt} W(p, t), \quad (1.8)$$

Линейный оператор (1) называется *стационарным*, если для него из равенства (1) следует при любом τ

$$x_{\text{вых}}(t - \tau) = U[x_{\text{вх}}(t - \tau)]. \quad (1.9)$$

Пусть U — линейный стационарный оператор; покажем, что его передаточная функция, если она существует, фактически не зависит от t . Действительно, заменяя в правой части (7) t на $t - \tau$, имеем при любом τ с учетом стационарности U

$$\begin{aligned} W(p, t - \tau) &= e^{-p(t-\tau)} U[e^{p(t-\tau)}] = \\ &= e^{-p(t-\tau)} U(e^{pt} e^{-p\tau}) = e^{-pt} U(e^{pt}), \end{aligned}$$

откуда и следует, что

$$W(p, t) = W(p). \quad (1.10)$$

При этом соотношение (8) может быть представлено в виде

$$U(e^{pt}) = e^{pt} W(p), \quad (1.11)$$

справедливом для любого линейного стационарного оператора U .

Во всем дальнейшем изложении мы ограничимся классом линейных стационарных операторов типа свертки в пространстве обобщенных функций, т. е. таких операторов, для которых связь между входом и выходом дается формулой

$$x_{\text{вых}} = U(x_{\text{вх}}) = h * x_{\text{вх}} = x_{\text{вх}} * h, \quad (1.12)$$

где h — заданная обобщенная функция, $x_{\text{вх}}$ — обобщенная функция, соответствующая входному сигналу, а операция свертки понимается в смысле § 5 гл. I. При заданной обобщенной функции h , естественно, допускаются только такие входные сигналы, при которых операция свертки имеет смысл и коммутативна. При этом выходной сигнал $x_{\text{вых}}$ является в общем случае обобщенной функцией, не сводящейся к обыкновенной (регулярной).

Очевидно, что уравнение (12), рассматриваемое как уравнение связи между функциями $x_{\text{вх}}$ и $x_{\text{вых}}$, определяет линейный оператор, удовлетворяющий условиям (2). Непосредственно легко убедиться, что этот оператор — стационарный, так как из формул (I.5.25) и (12)

следует, что при любом τ

$$U[x_{\text{вх}}(t - \tau)] = h * x_{\text{вх}}(t - \tau) = x_{\text{вых}}(t - \tau).$$

В тех случаях, когда h или $x_{\text{вх}}$ являются обыкновенными функциями, выражению (12) может быть придан более конкретный смысл. Если $x_{\text{вх}}$ — обыкновенная функция, то в соответствии с (I.5.7) имеем

$$x_{\text{вых}} = \langle h_{\tau}, x_{\text{вх}}(t - \tau) \rangle. \quad (1.13)$$

Если, наоборот, h — обыкновенная функция, то аналогично имеем

$$x_{\text{вых}} = \langle x_{\text{вх}} \tau, h(t - \tau) \rangle. \quad (1.14)$$

Вместо формул (13), (14) можно также использовать представление свертки в виде интеграла по параметру, приведенное в § 5 гл. I. Тогда будем иметь

$$x_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x_{\text{вх}}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x_{\text{вх}}(t - \tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Выражение (15) может быть упрощено, если функции h и x обладают некоторыми дополнительными свойствами. Например, если

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \quad (1.16)$$

то из (15) следует

$$x_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) x_{\text{вх}}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) x_{\text{вх}}(t - \tau) d\tau. \quad (1.17)$$

Как известно [66], соотношение (16) носит название *условия физической реализуемости системы*. Если дополнительно к (16) внешнее возбуждение прикладывается к системе при $t = 0$, т. е.

$$x_{\text{вх}}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0,$$

то из (17) следует

$$x_{\text{вых}} = \int_0^t h(t - \tau) x_{\text{вх}}(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) x_{\text{вх}}(t - \tau) d\tau. \quad (1.18)$$

Впрочем, запись свертки в виде (15), (17) или (18) мы в дальнейшем часто будем применять и для произвольных

обобщенных функций при условии выполнения соответствующих требований на их носители (см. § 5 гл. I).

Найдем теперь весовую и передаточную функции линейного стационарного оператора типа свертки, определенного соотношением (12). В соответствии с (6) и (12) с учетом (I. 5.14) имеем

$$U[\delta(t - \tau)] = h * \delta(t - \tau) = h(t - \tau). \quad (1.19)$$

Часто также весовой функцией считают функцию $h(t)$.

Пусть теперь $x_{\text{вх}} = e^{pt}$. Тогда в соответствии с (13) имеем

$$x_{\text{вых}} = \langle h_{\tau}, e^{p(t-\tau)} \rangle = e^{pt} \langle h_{\tau}, e^{-p\tau} \rangle.$$

Сравнивая это равенство с (11) и учитывая (I. 6.2), находим, что передаточная функция оператора типа свертки равна преобразованию Лапласа от весовой функции

$$W(p) = \langle h, e^{-pt} \rangle = L(h). \quad (1.20)$$

При этом, естественно, предполагается, что весовая функция $h(t)$ имеет преобразование по Лапласу. Для этого она должна удовлетворять условиям § 6 гл. I. В частности, везде в дальнейшем изложении будет предполагаться, что носитель весовой функции $h(t)$ расположен на полуоси $t \geq 0$. Согласно (16) это соответствует условию физической реализуемости. При этом, учитывая теорему 2 § 6 гл. I, можно утверждать, что функция комплексного переменного $W(p)$ в том и только том случае является передаточной функцией физически реализуемого оператора типа свертки, если существует такая постоянная C , что при $\operatorname{Re} p > C$ функция $W(p)$ аналитична и удовлетворяет условию (I. 6.4):

$$|W(p)| < A|p|^s.$$

Проиллюстрируем сказанное рядом простых примеров.

Пример 1.1. Рассмотрим выражение (4) как оператор, связывающий $x_{\text{вх}}$ и $x_{\text{вых}}$. Вводя обобщенную функцию

$$h = b_0 \delta^{(m)} + b_1 \delta^{(m-1)} + \dots + b_m \delta \quad (1.21)$$

и используя формулу (I.5.20), соотношение (4) можно записать в виде свертки:

$$x_{\text{ВЫХ}} = h * x_{\text{ВХ}}.$$

Отсюда следует, что оператор (4) является линейным и стационарным типа свертки и выражение (21) является его весовой функцией. Взяв преобразование Лапласа от (21), с помощью формулы (I.6.7) сразу находим передаточную функцию оператора (4):

$$W(p) = b_0 p^m + \dots + b_m = b(p). \quad (1.22)$$

Пример 1.2. Дифференциально-разностное выражение

$$x_{\text{ВЫХ}} = \sum_{k=0}^m b_k x_{\text{ВХ}}^{(m-k)}(t - \tau_k), \quad \tau_k = \text{const}, \quad b_k = \text{const}, \quad (1.23)$$

$$\tau_k \geq 0,$$

можно представить в виде свертки:

$$x_{\text{ВЫХ}} = h * x_{\text{ВХ}},$$

где

$$h = \sum_{k=0}^m b_k \delta^{(m-k)}(t - \tau_k). \quad (1.24)$$

Передаточная функция элемента (23), равная преобразованию Лапласа от функции h , в соответствии с (I.6.7) и (I.6.9) равна

$$W(p) = \sum_{k=0}^m b_k p^{m-k} e^{-p\tau_k}. \quad (1.25)$$

Пример 1.3. Предположим, что передаточная функция элемента (12) является отношением двух полиномов:

$$W(p) = \frac{m(p)}{d(p)} = \frac{m_1 p^{n-1} + \dots + m_n}{p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n}. \quad (1.26)$$

Известно [46], что функция (26) является преобразованием Лапласа от функции

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum_{\rho=1}^l \sum_{k=1}^{v_{\rho}} \frac{c_{\rho k} t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_{\rho} t}, & t > 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

$$c_{\rho k} = \frac{1}{(v_{\rho} - k)!} \frac{d^{v_{\rho}-k}}{dp^{v_{\rho}-k}} \left(\frac{m(p)(p - p_{\rho})^{v_{\rho}}}{d(p)} \right)_{p=p_{\rho}},$$

где p_{ρ} — корни уравнения $d(p) = 0$, v_{ρ} — их кратность, $\rho = 1, 2, \dots, l$. Поэтому связь между входным и выходным сигналами в данном случае дается формулами (17). Заметим также, что тот факт, что $h(t) = 0$ при $t < 0$ (условие физической реализуемости), следует непосредственно из (I.6.4) и (26).

Выведем теперь одно важное свойство операторов типа свертки, необходимое для дальнейшего. Пусть в уравнении (12)

$$x_{\text{вх}} = e^{\lambda t} x_{1 \text{ вх}}, \quad (1.28)$$

где λ — комплексное число, и умножение понимается в смысле § 3 гл. I. Покажем, что в этом случае

$$x_{\text{вых}} = e^{\lambda t} x_{1 \text{ вых}}, \quad (1.29)$$

причем

$$x_{1 \text{ вых}} = h_1 * x_{1 \text{ вх}}, \quad h_1 = e^{-\lambda t} h. \quad (1.30)$$

Докажем формулы (29), (30) для того случая, когда $x_{1 \text{ вх}}$ — обыкновенная функция. В этом случае из (12) и (13), при условии (28), следует

$$x_{\text{вых}} = \langle h_{\tau}, e^{\lambda(t-\tau)} x_{1 \text{ вх}}(t-\tau) \rangle = e^{\lambda t} \langle h_{\tau}, e^{-\lambda \tau} x_{1 \text{ вх}}(t-\tau) \rangle.$$

Сравнивая это выражение с (29), имеем

$$\begin{aligned} x_{1 \text{ вых}} &= \langle h_{\tau}, e^{-\lambda \tau} x_{1 \text{ вх}}(t-\tau) \rangle = \langle e^{-\lambda \tau} h_{\tau}, x_{1 \text{ вх}}(t-\tau) \rangle = \\ &= (e^{-\lambda t} h) * x_{1 \text{ вх}}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

что совпадает с (30).

В общем случае доказательство формул (29), (30) сводится к доказательству тождества

$$F_1 * (e^{\lambda t} F_2) = e^{\lambda t} [(e^{-\lambda t} F_1) * F_2],$$

справедливого при любых обобщенных функциях F_1 и F_2 . Доказательство этого тождества предоставляется читателю в качестве упражнения.

Отметим также, что весовой функции h_1 , фигурирующей в (30), соответствует передаточная функция $W(p + \lambda)$. Действительно, взяв преобразование Лапласа, имеем

$$\begin{aligned} L(h_1) &= L(e^{-\lambda t} h) = \langle e^{-\lambda t} h, e^{-pt} \rangle = \\ &= \langle h, e^{-(p+\lambda)t} \rangle = W(p + \lambda). \end{aligned} \quad (1.32)$$

В заключение настоящего параграфа введем еще одну удобную форму записи. Часто в дальнейшем оператор свертки (12) будем задавать следующим образом:

$$x_{\text{вых}} = W(p) x_{\text{вх}}, \quad (1.33)$$

где $W(p)$ — его передаточная функция. Запись (33) означает, что задан оператор (12) типа свертки, передаточная функция которого равна $W(p)$. Кроме того, из (33), в соответствии с (11), следует, что при $x_{\text{вх}} = e^{pt}$

$$x_{\text{вых}} = W(p) e^{pt}. \quad (1.34)$$

Применяя запись (33) и учитывая (32), получаем также, что соотношение (30) эквивалентно следующему:

$$x_{1 \text{ вых}} = W(p + \lambda) x_{1 \text{ вх}}. \quad (1.35)$$

Формула (34) удобна для вычисления передаточных функций линейных стационарных операторов в практических задачах.

Рассмотрим теперь кратко вопрос о построении весовых и передаточных функций сложных систем, представляющих собой соединение линейных стационарных операторов.

Пусть сначала имеется последовательное соединение двух элементов

$$y = h_2 * z, \quad z = h_1 * x, \quad (1.36)$$

что равносильно следующему:

$$y = h_2 * h_1 * x. \quad (1.37)$$

Прежде всего, нетрудно убедиться, что соотношение (36) представляет собой линейный стационарный оператор. Полагая в (37) $x = \delta$, имеем

$$h_c = h_2 * h_1, \quad (1.38)$$

т. е. весовая функция последовательного соединения равна свертке весовых функций элементов. Практически вычисление свертки, за исключением некоторых простейших случаев, достаточно сложно. Гораздо удобнее вычислять передаточные функции последовательного соединения. Действительно, полагая в (36) $x = e^{pt}$, получаем по (34) $z = W_1(p)e^{pt}$, откуда снова с помощью (34) имеем

$$y = e^{pt} W_1(p) W_2(p),$$

где $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — передаточные функции последовательно соединенных элементов. Иными словами, получаем известную формулу

$$W_c(p) = W_1(p) W_2(p), \quad (1.39)$$

где W_c — передаточная функция последовательного соединения.

Аналогичную формулу легко получить для последовательного соединения произвольного числа элементов. При этом выполнение условий физической реализуемости каждого из элементов гарантирует ассоциативность и коммутативность элементов цепи, т. е. при условии физической реализуемости каждого звена элементы последовательной цепи можно объединять в группы и менять местами. При невыполнении условий физической реализуемости этого, вообще говоря, делать нельзя.

В случае параллельного соединения

$$y = \sum_i z_i, \quad z_i = h_i * x, \quad (1.40)$$

легко получить, что

$$\left. \begin{aligned} h_c &= \sum_i h_i, \\ W_c &= \sum_i W_i(p). \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Наконец, рассмотрим соединение обратной связью

$$\left. \begin{aligned} y &= h_1 * (z + x), \\ z &= h_2 * y, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

где входным сигналом является x , выходным — y . Полагая $x = e^{pt}$, $z = W_z(p) e^{pt}$, $y = W_c(p) e^{pt}$, из (4) имеем с учетом (34)

$$W_z(p) = W_2(p) W_c(p), \quad W_c(p) = W_1(p) W_z(p) + W_1(p),$$

откуда

$$W_c(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)}. \quad (1.43)$$

Весовая функция оператора (42) может быть получена как обратное преобразование Лапласа от (43). Из (42) можно получить также уравнение в свертках для весовой функции соединения обратной связью. Полагая в (42) $x = \delta$, получим

$$h_c = h_1 * h_2 * h_c + h_1, \quad (1.44)$$

где h_c , как и ранее, — весовая функция соединения.

§ 2. Линейные стационарные системы

Понятие оператора подразумевает однозначную связь между входом и выходом. Для большинства реальных элементов, однако, такой однозначной связи не имеется. При одном и том же внешнем возмущении большинство реальных элементов могут совершать различные движения в зависимости от некоторых дополнительных условий, например от начального состояния элемента. Поэтому многие реальные элементы описываются не операторным соотношением вида (1.1), а некоторым уравнением.

В дальнейшем *линейной стационарной системой* будет называться любая материальная система, описываемая операторным уравнением вида

$$U_1[x_{\text{вых}}(t)] = U_2[x_{\text{вх}}(t)], \quad (2.1)$$

где U_1 и U_2 — некоторые линейные стационарные операторы. Ниже всегда предполагается, что U_1 и U_2 — операторы типа свертки, рассмотренные в предыдущем

параграфе, которые будем предполагать физически реализуемыми. Поэтому с учетом (1.12) уравнение линейной стационарной системы может быть представлено в виде

$$h_1 * x_{\text{ВЫХ}} = h_2 * x_{\text{ВХ}}, \quad (2.2)$$

где h_1 и h_2 — заданные обобщенные функции, причем h_1 и h_2 равны нулю при $t < 0$. Если $W_1(p) = L(h_1)$, $W_2(p) = L(h_2)$ — соответствующие преобразования Лапласа, то, используя форму записи (1.33), из (2) имеем

$$W_1(p) x_{\text{ВЫХ}} = W_2(p) x_{\text{ВХ}}. \quad (2.3)$$

Функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — передаточные функции операторов U_1 и U_2 .

С математической точки зрения (2) является уравнением в свертках, общие соображения о решении которого приведены в § 8 гл. I.

Примеры 2.1. Пусть $x_{\text{ВХ}}$ и $x_{\text{ВЫХ}}$ связаны линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{D^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_1 \frac{D^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x_{\text{ВЫХ}} = \\ = b_0 \frac{D^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_1 \frac{D^{m-1} x_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x_{\text{ВХ}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Покажем, что уравнение (4) есть частный случай уравнения (2). Действительно, используя формулу (1.21), можно записать уравнение (4) в виде

$$h_1 * x_{\text{ВЫХ}} = h_2 * x_{\text{ВХ}},$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= \delta^{(n)} + a_1 \delta^{(n-1)} + \dots + a_n \delta, \\ h_2 &= b_0 \delta^{(m)} + b_1 \delta^{(m-1)} + \dots + b_m \delta. \end{aligned}$$

Если же использовать запись (3), то уравнение (4) с учетом (1.22) примет вид

$$a(p) x_{\text{ВЫХ}} = b(p) x_{\text{ВХ}}, \quad (2.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ b(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Пример 2.2. Аналогично можно представить дифференциально-разностное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{D^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} (t - \tau_0) + \dots + a_n x_{\text{ВЫХ}} (t - \tau_n) = \\ = b_0 \frac{D^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} (t - \nu_0) + \dots + b_m x_{\text{ВХ}} (t - \nu_m), \quad (2.7) \\ \tau_i > 0, \quad \nu_i > 0, \end{aligned}$$

где τ_i, ν_i — постоянные. Непосредственно легко убедиться, используя (1.24) и (1.25), в том, что уравнение (7) можно записать в виде, аналогичном (2), где

$$\begin{aligned} h_1 &= \delta^{(n)}(t - \tau_0) + \dots + a_n \delta(t - \tau_n), \\ h_2 &= b_0 \delta^{(m)}(t - \nu_0) + \dots + b_m \delta(t - \nu_m), \end{aligned}$$

или в виде (3), где

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= p^n e^{-p\tau_0} + \dots + a_n e^{-p\tau_n}, \\ W_2(p) &= b_0 p^m e^{-p\nu_0} + \dots + b_m e^{-p\nu_m}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Пример 2.3. Интегральное уравнение

$$x_{\text{ВЫХ}} + \int_0^t r(t - \tau) x_{\text{ВЫХ}}(\tau) d\tau = x_{\text{ВХ}}, \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

можно представить в виде (2), если считать, что

$$x_{\text{ВХ}} = x_{\text{ВЫХ}} = r(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (2.10)$$

Действительно, при выполнении (10), учитывая (1.18), уравнение (9) можно записать в следующей форме:

$$[\delta + r(t)] * x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВХ}}. \quad (2.11)$$

Из приведенных простых примеров следует, что уравнения вида (2) являются весьма общими и охватывают многочисленные прикладные задачи.

В общем случае связь между входом и выходом системы, описываемой уравнением вида (2), определяется неоднозначно. Действительно, пусть задан входной сигнал $x_{\text{ВХ}}$ и $x_{\text{ВЫХО}}(x_{\text{ВХ}})$ — некоторое решение уравнения

$$h_1 * x_{\text{ВЫХО}} = h_2 * x_{\text{ВХ}}. \quad (2.12)$$

Тогда, если x_c — любое решение однородного уравнения

$$h_1 * x_c = 0, \quad (2.13)$$

а $x_{\text{вых}0}$ — найденное решение уравнения (12), то сумма

$$x_{\text{вых}} = x_{\text{вых}0} (x_{\text{вх}}) + x_c \quad (2.14)$$

будет также решением уравнения (12).

Рассматривая соотношение (14) как уравнение связи между функциями $x_{\text{вх}}$ и $x_{\text{вых}}$, можно убедиться, что оно определяет, в зависимости от выбора x_c , целое множество операторов, в общем случае не являющихся линейными или стационарными. В частности, уравнение (2) может порождать целое множество линейных стационарных и нестационарных операторов. Действительно, пусть g — произвольное решение уравнения

$$h_1 * g = h_2, \quad (2.15)$$

получающегося из (2) при $x_{\text{вх}} = \delta$. Тогда выражение

$$x_{\text{вых}} = (x_c + g) * x_{\text{вх}} = \bar{h} * x_{\text{вх}} \quad (2.16)$$

представляет собой решение уравнения (2), если только

$$\left. \begin{aligned} h_1 * (x_c * x_{\text{вх}}) &= (h_1 * x_c) * x_{\text{вх}}, \\ h_2 * (g * x_{\text{вх}}) &= (h_2 * g) * x_{\text{вх}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Для проверки этого факта свернем выражение (16) с h_1 . Тогда будем иметь

$$h_1 * x_{\text{вых}} = h_1 * (x_c * x_{\text{вх}}) + h_1 * (g * x_{\text{вх}}).$$

Если выполнены условия (17), то

$$h_1 * (x_c * x_{\text{вх}}) = (h_1 * x_c) * x_{\text{вх}} = 0,$$

$$h_1 * (g * x_{\text{вх}}) = (h_1 * g) * x_{\text{вх}} = h_2 * x_{\text{вх}}$$

и

$$h_1 * x_{\text{вых}} = h_2 * x_{\text{вх}},$$

что и требовалось.

Таким образом, выбирая в (16) различным образом функцию x_c , мы получим целое множество линейных стационарных операторов типа свертки с весовыми функциями $\bar{h}$, соответствующих одному операторному уравнению (2).

Пример 2.4. Рассмотрим простейшее уравнение

$$\frac{Dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + ax_{\text{ВЫХ}} = (p + a)x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВХ}}. \quad (2.18)$$

Предположим сначала, что $x_{\text{ВХ}}$ — обыкновенная функция. Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$x_{\text{ВЫХ}} = Ce^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} x_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau = U(x_{\text{ВХ}}), \quad (2.19)$$

где C — произвольная постоянная. Если, например, $C = 1$, то оператор U в (19) — нелинейный. Если положить $C = \langle F, x_{\text{ВХ}} \rangle$, где F — некоторая обобщенная функция, то легко проверить, что соотношение (19) будет представлять собой линейный оператор, вообще говоря, нестационарный. Построим теперь совокупность линейных стационарных операторов, определяемых уравнением (18). Для этого рассмотрим функцию

$$g = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-at}, & t \geq 0, \end{cases}$$

Используя (I.2.20), имеем

$$\frac{Dg}{dt} = \frac{dg}{dt} + \delta(t), \quad \frac{dg}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -ae^{-at}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{Dg}{dt} + ag = \delta.$$

Тогда нетрудно проверить, что выражение

$$x_{\text{ВЫХ}} = (Ce^{-at} + g) * x_{\text{ВХ}}, \quad (2.20)$$

если оно существует, является решением уравнения (18) и одновременно при любом значении постоянной C определяет линейный стационарный оператор. Так как $x_{\text{ВХ}}$ — обыкновенная функция, то, с учетом (I.5.7), соотношение (20) представляется в виде

$$x_{\text{ВЫХ}} = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau)} x_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t e^{-a(t-\tau)} x_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau, \quad (2.21)$$

где предполагается, что все интегралы в правой части существуют. Если же распространить оператор (20) на

обобщенные входные сигналы, то функция

$$Ce^{-at} + g$$

при каждом значении C будет весовой функцией этого линейного стационарного оператора.

Все сказанное выше и приведенный пример приводят к вопросу: что же считать весовой функцией системы (2)? Действительно, полагая в (2) в соответствии с определением весовой функции $x_{\text{вх}} = \delta$, мы приходим к уравнению (15), каждое решение которого является весовой функцией некоторого линейного стационарного оператора. Для того чтобы избежать этой неопределенности, будем считать весовой функцией системы (2) то решение уравнения (15), которое имеет преобразование Лапласа. Нетрудно показать (см. § 8 гл. I), что если такое решение существует, то оно определяется единственным образом. Действительно, предполагая, что в (15) все функции имеют преобразование Лапласа, имеем по (I.8.6)

$$L(g) = \frac{L(h_2)}{L(h_1)} = \frac{W_2(p)}{W_1(p)}. \quad (2.22)$$

Если выражение $\frac{W_2(p)}{W_1(p)}$ действительно является преобразованием Лапласа, то соответствующий оригинал $g(t)$ будет решением уравнения (15), и мы будем называть его весовой функцией системы (2). Тогда функцию $W_c = \frac{W_2(p)}{W_1(p)}$, являющуюся преобразованием Лапласа от $g(t)$, мы будем называть передаточной функцией системы (2). При этом функция $W_c(p)$ удовлетворяет условию (I.6.4) и аналитична при $\operatorname{Re} p > C$, и будем иметь $g = 0$ при $t < 0$, т. е. весовая функция системы будет обладать свойством физической реализуемости. Такой случай обычно и встречается в приложениях.

Если же частное $\frac{W_2(p)}{W_1(p)}$ не является преобразованием по Лапласу, то положение осложняется. В этом случае может оказаться, что уравнение (15) вообще не имеет решения либо имеет решение, не имеющее преобразования по Лапласу. Следует отметить, однако, что такая ситуация является искусственной и в приложениях встречается крайне редко.

Поэтому мы в дальнейшем будем всегда предполагать, что отношение $\frac{W_2(p)}{W_1(p)}$ является преобразованием Лапласа, удовлетворяет условию (I.6.4) и аналитично при $\operatorname{Re} p > C$. В этом случае весовой функцией системы будет являться решение уравнения (15), удовлетворяющее условию физической реализуемости, а само частное $\frac{W_2(p)}{W_1(p)}$ будет передаточной функцией системы.

Пример 2.5. Продолжим изучение уравнения (4) в предположении, что $m = n - 1$. По (22) и (6) имеем

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n}{p^n + \dots + a_n}. \quad (2.23)$$

Выражение (23) заведомо удовлетворяет условию (I.6.4), так как $W(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ и аналитична при достаточно больших по модулю p . Поэтому (23) — передаточная функция системы (4), а ее весовая функция определяется как оригинал выражения (23) либо как частное решение уравнения

$$p^n h + a_1 p^{n-1} h + \dots + a_n h = b_1 \delta^{(n-1)} + \dots + b_n \delta, \quad (2.24)$$

удовлетворяющее условию физической реализуемости. Уравнение (24) получается из (4) при $x_{\text{вх}} = \delta$.

В данном случае можно искать весовую функцию $h(t)$ и как решение уравнения (24) в классе обыкновенных функций, удовлетворяющее условию

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \quad (2.25)$$

и претерпевающее разрывы вместе со своими производными при $t = 0$. Пусть

$$h(+0) = h_0, \quad \frac{dh}{dt} (+0) = h'_0, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}h}{dt^{n-1}} (+0) = h_0^{(n-1)}. \quad (2.26)$$

Тогда, дифференцируя h обобщенно, имеем

$$\begin{aligned} ph &= \frac{dh}{dt} + h_0 \delta, \\ p^2 h &= \frac{d^2 h}{dt^2} + h'_0 \delta + h_0 \delta', \\ &\dots \dots \dots \\ p^n h &= \frac{d^n h}{dt^n} + h_0^{(n-1)} \delta + \dots + h_0 \delta^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (24) и приравнявая коэффициенты при функции δ и ее производных в левой и правой частях, получим уравнение в классических производных

$$\frac{d^n h}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} h}{dt^{n-1}} + \dots + a_n h = 0, \quad (2.27)$$

которому весовая функция h удовлетворяет при $t \geq 0$, а также соотношения:

$$\begin{aligned} h_0 &= b_1, \\ h'_0 + a_1 h_0 &= b_2, \\ h_0^{(2)} + a_1 h'_0 + a_2 h_0 &= b_3, \\ &\dots \dots \dots \\ h_0^{(n-1)} + a_1 h_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} h_0 &= b_n, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= b_1, \quad h'_0 = (b_2 - a_1 b_1), \\ h_0^{(2)} &= b_3 - a_2 b_1 - a_1 (b_2 - a_1 b_1) \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Искомая весовая функция является решением уравнения (27) при начальных условиях (28). Явное выражение весовой функции для данного примера дается формулой (1.27).

В заключение отметим, что, используя понятия весовой и передаточной функций системы, можно составлять весовые и передаточные функции сложных систем, пользуясь соотношениями, полученными в конце предыдущего параграфа для типовых соединений стационарных операторов.

§. 3 Линейные стационарные операторы и системы при периодическом возбуждении.

Импульсно-частотные характеристики

В настоящем параграфе изучается важная для всего последующего изложения задача о вычислении реакции линейного стационарного оператора (или системы) на входной периодический сигнал. Пусть имеется линейный стационарный оператор вида (1.12):

$$y = h * x, \quad (3.1)$$

где h — весовая функция оператора (1), а свертка понимается в смысле § 5 гл. I. Если h — произвольная обобщенная функция, а x — периодическая обобщенная функция, то свертка в правой части (1), вообще говоря, не определена и может не существовать (см. § 7 гл. I). Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что весовая функция h имеет преобразование Лапласа, т. е. имеет смысл передаточная функция $W(p)$, и имеет место формула (1.34):

$$y = W(p) e^{pt} \quad \text{при} \quad x = e^{pt}. \quad (3.2)$$

Если разложение входного сигнала в ряд Фурье имеет вид

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{k i \omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.3)$$

то, подставляя (3) в (1), имеем

$$y = h * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{k i \omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (h * e^{k i \omega t}).$$

Но по (2)

$$h * e^{k i \omega t} = e^{k i \omega t} W(k i \omega).$$

Поэтому

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k W(k i \omega) e^{k i \omega t}, \quad (3.4)$$

где предполагается, что все величины $W(k i \omega)$ имеют смысл.

Введем в рассмотрение ряд Фурье

$$\varphi(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(k i \omega) e^{k i \omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.5)$$

и назовем его *импульсно-частотной характеристикой* (ИЧХ) оператора (1). Если выполнено условие (I.7.19):

$$|W(k i \omega)| < A k^s, \quad (3.6)$$

что в дальнейшем всегда будет предполагаться, то ИЧХ будет обобщенной периодической функцией. Тогда, полагая $C_{1k} = x_k$, $C_{2k} = \frac{1}{T} W(k i \omega)$ и используя соотношение

(I.7.44), можно переписать формулу (4) в виде

$$y = \varphi * x, \quad (3.7)$$

где свертка понимается уже в смысле свертки периодических обобщенных функций (§ 7 гл. I). Если использовать форму записи, аналогичную классической, то (7) при $a = 0$ можно записать в виде

$$y = \int_0^T \varphi(T, t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^T \varphi(T, \tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Если же φ и x сводятся к обычным функциям, то интеграл в (8) можно понимать в классическом смысле.

В дальнейшем всегда, когда речь будет идти о периодических входных и выходных сигналах, соотношение (1) будет пониматься в смысле (7). При этом формулы вида (8) имеют прежде всего теоретическое значение. При практических вычислениях, особенно если $x(t)$ — конечная григонометрическая сумма, часто бывает удобнее пользоваться непосредственно соотношением (4).

В некоторых важных частных случаях формулы (8) могут упрощаться [75]. Если, в частности,

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (3.9)$$

то

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{2k+1} e^{(2k+1) i \omega t}, \quad (3.10)$$

где

$$x_{2k+1} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(\tau) e^{-(2k+1) i \omega \tau} d\tau, \quad x_{2k} = 0. \quad (3.11)$$

При этом из (4) имеем

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{2k+1} W[(2k+1) i \omega] e^{(2k+1) i \omega t}. \quad (3.12)$$

Поэтому, если ввести в рассмотрение обобщенную периодическую функцию

$$\psi(T, t) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1) i \omega] e^{(2k+1) i \omega t}, \quad (3.13)$$

то, аналогично (7), будем иметь

$$y = \psi * x, \quad (3.14)$$

или в интегральной форме

$$y = \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^{T/2} \psi(T, \tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Все сказанное подразумевает, что при данном ω имеют смысл все величины $W(ki\omega)$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Этот случай мы будем называть *нерезонансным*. Если же хотя бы одна из величин $ki\omega$ является полюсом передаточной функции, то имеем случай *резонанса*, который требует специального изучения и будет рассмотрен ниже.

Приведенные соотношения можно использовать для решения более общей задачи, когда в (1) x — экспоненциально-периодическая функция, т. е.

$$x = e^{\lambda t} z, \quad z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{ki\omega t}. \quad (3.16)$$

Используя соотношения (1.28) — (1.34), можно утверждать, что в этом случае

$$y = e^{\lambda t} u, \quad (3.17)$$

причем

$$u = (e^{-\lambda t} h) * z. \quad (3.18)$$

Используя запись (1.35), можно последнее соотношение переписать в эквивалентной форме:

$$u = W(p + \lambda) z. \quad (3.19)$$

Если рассматривать систему (19) как исходную, то, учитывая, что сигнал z периодический, можно применить формулу (7), которая сразу дает

$$u = \varphi(T, \lambda, t) * z, \quad y = e^{\lambda t} [\varphi(T, \lambda, t) * z], \quad (3.20)$$

где

$$\varphi(T, \lambda, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (3.21)$$

При интегральной форме записи соотношения (20) принимают вид

$$u = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) z(\tau) d\tau, \quad (3.22)$$

$$y = e^{\lambda t} \int_0^T \varphi(t, \lambda, t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (3.23)$$

В дальнейшем всегда предполагается, что при всех λ , при которых ряд (21) определен, он представляет собой обобщенную периодическую функцию, т. е. для него выполняется при любом фиксированном λ условие, аналогичное (6):

$$|W(\lambda + ki\omega)| < Ak^s, \quad (3.24)$$

если только имеют смысл все величины $W(\lambda + ki\omega)$.

Обобщенную функцию (21) в дальнейшем будем называть *смещенной импульсно-частотной характеристикой* (СИЧХ) оператора (1). Импульсно-частотная характеристика $\varphi(T, t)$ получается из СИЧХ $\varphi(T, \lambda, t)$ при $\lambda = 0$. Если в (1)

$$x = \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega t}$$

— периодическая последовательность δ -функций, имеющая период T , то из (4) сразу получаем

$$y = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega) e^{ki\omega t} = \varphi(T, t),$$

т. е. ИЧХ $\varphi(T, t)$ является реакцией системы на периодическую последовательность δ -функций. Это обстоятельство позволяет установить связь между ИЧХ и весовой функцией системы. Действительно, учитывая, что

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

после подстановки этого выражения в (1) имеем

$$\varphi(T, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h * \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT). \quad (3.25)$$

Аналогичным образом из (18) получаем

$$\begin{aligned}\varphi(T, \lambda, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{-\lambda t} h) * \delta(t - kT) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t-kT)} h(t - kT). \quad (3.26)\end{aligned}$$

Если весовая функция h обладает свойством физической реализуемости, т. е. $h(t) = 0$ при $t < 0$, то в формулах (25) и (26) суммирование фактически распространяется только на те значения k , где $t - kT \geq 0$. Если в формуле (26) заменить индекс суммирования k на $-k$, то она примет вид

$$\varphi(T, \lambda, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t+kT)} h(t + kT). \quad (3.27)$$

В этом соотношении, в силу периодичности $\varphi(T, \lambda, t)$ по t , можно полагать $0 < t < T$. При этом, если функция h обладает свойством физической реализуемости, то в (27) слагаемые, соответствующие отрицательным значениям k , исчезают, т. е. для физически реализуемого оператора (1)

$$\begin{aligned}\varphi(T, \lambda, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(t+kT)} h(t + kT) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, t), \quad (3.28) \\ 0 &\leq t < T.\end{aligned}$$

Ряд, стоящий в правой части (21), является рядом Фурье периодической функции, заданной на интервале $0 \leq t < T$ выражением (28), и сходится к ней в смысле теории обобщенных функций. Если же $\tilde{\varphi}(T, \lambda, t)$ — обыкновенная функция, а сходимости ряда (21) понимается в классическом смысле, то положение меняется. Напомним, что заданную при $0 \leq t < T$ обыкновенную функцию $\tilde{f}(t)$ можно при определенных условиях [101] представить сходящимся рядом Фурье

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{kt\omega}, \quad f_k = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(\tau) e^{-kt\omega\tau} d\tau.$$

При этом в каждой точке непрерывности функции $\tilde{f}(t)$

$$f(t) = \tilde{f}(t).$$

Если же при $t = t_p$ функция $\tilde{f}(t)$ претерпевает разрыв, то

$$f(t_p) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(t_p - 0) + \tilde{f}(t_p + 0)]. \quad (3.29)$$

В частности,

$$f(0) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(0) + \tilde{f}(T)]. \quad (3.30)$$

Предположим теперь, что ряд, фигурирующий в формуле (28), представляет собой функцию, ряд Фурье которой сходится. Тогда в каждой точке непрерывности функции (28) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(T, \lambda, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(t+kT)} h(t+kT) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega t} = \varphi(T, \lambda, t), \quad 0 \leq t < T, \end{aligned} \quad (3.31)$$

причем равенство понимается в классическом смысле.

В точках, где $\tilde{\varphi}(T, \lambda, t)$ имеет разрывы, соотношение (31) не выполняется, но имеют место соотношения, получающиеся из (29). При $t = 0$ из (30) следует

$$\varphi(T, \lambda, 0) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) + \tilde{\varphi}(T, \lambda, T)]. \quad (3.32)$$

Но из (28) вытекает, что

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kT} h(kT), \\ \tilde{\varphi}(T, \lambda, T) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda kT} h(kT) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) - h(+0). \end{aligned}$$

Поэтому из (32) имеем

$$\varphi(T, \lambda, 0) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) - \frac{1}{2} h(+0),$$

т. е.

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kT} h(kT) - \frac{1}{2} h(+0). \quad (3.33)$$

Приведенные выше соотношения определяют поведение ряда (21) на интервале $0 \leq t < T$.

В дальнейшем встретится ряд задач, связанных с вычислением величины $\varphi(T, \lambda, a)$, где число a лежит вне интервала $0 \leq t < T$. Но тогда можно найти целое число s такое, что

$$0 \leq a + sT < T,$$

и

$$\varphi(T, \lambda, a) = \varphi(T, \lambda, a + sT) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, a + sT). \quad (3.34)$$

Рассмотрим, в частности, функцию $\varphi(T, \lambda, t - \tau)$, где

$$0 \leq t < T, \quad 0 \leq \tau < T.$$

В этом случае разность $t - \tau$ изменяется в интервале $-T < t - \tau < T$ и по (34) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t - \tau) &= \\ &= \begin{cases} \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau), & 0 < t - \tau < T, \\ \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau + T), & -T < t - \tau < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

С учетом (28) это дает

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t - \tau) &= \\ &= \begin{cases} \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau + T) + e^{-\lambda(t-\tau)h} h(t - \tau), & 0 < t - \tau < T, \\ \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau + T), & -T < t - \tau < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Допустим теперь, что вместо оператора (1) имеем систему вида (2.2):

$$h_1 * y = h_2 * x \quad (3.37)$$

или, что то же,

$$W_1(p) y = W_2(p) x. \quad (3.38)$$

Полагая, что входной сигнал $x(t)$ определяется рядом (3), а выходной сигнал также периодический, т. е.

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ki\omega t}, \quad (3.39)$$

и, подставляя (3) и (39) в (38), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(ki\omega) y_k e^{ki\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(ki\omega) x_k e^{ki\omega t}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим

$$W_1(ki\omega) y_k = W_2(ki\omega) x_k. \quad (3.40)$$

Если $W_1(ki\omega) \neq 0$ и определена при всех целых k , что соответствует отсутствию резонанса, то из (40) находим, что

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W_2(ki\omega)}{W_1(ki\omega)} x_k e^{ki\omega t} \quad (3.41)$$

и соответственно

$$y_k = \frac{W_2(ki\omega)}{W_1(ki\omega)} x_k. \quad (3.42)$$

Заметим теперь, что если положить

$$W(p) = \frac{W_2(p)}{W_1(p)}, \quad (3.43)$$

то формула (4) совпадает с (42) и будут справедливы формулы (7), (8), где

$$\varphi(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W_2(ki\omega)}{W_1(ki\omega)} e^{ki\omega t}. \quad (3.44)$$

Учитывая, что выражение (43) представляет собой передаточную функцию системы (37), можно утверждать, что в отсутствие резонанса линейная стационарная система на множестве входных и выходных периодических сигналов сводится к линейному стационарному оператору (7), в котором ИЧХ $\varphi(T, t)$ дается рядом (44). При этом предполагается, что для передаточной функции (43) выполнено условие (6).

Пусть входной сигнал системы (37) задается соотношениями (16), а выходной сигнал ищется в виде (17). Тогда, рассуждая аналогичным образом, нетрудно найти, что по-прежнему верны формулы (20), если положить

$$\varphi(T, \lambda, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W_2(\lambda + ki\omega)}{W_1(\lambda + ki\omega)} e^{ki\omega t} \quad (3.45)$$

и предположить справедливость условия (24). Ряды (44) и (45) будем называть соответственно ИЧХ и СИЧХ системы (37).

Отметим, что понятие смещенной импульсно-частотной характеристики, определяемой рядом (21), тесно связано с понятием $\mathfrak{D}$ -преобразования, введенным в [103]. Действительно, в соответствии со [103] для системы с передаточной функцией $W(p)$ вычисляется функция

$$F(q) = \frac{1}{T} W\left(\frac{q}{T}\right), \quad (3.46)$$

после чего составляется ряд

$$\begin{aligned} F^*(q, \varepsilon) &= \mathfrak{D}[F(q)] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi ik)\varepsilon} F(q+2\pi ik), \quad 0 \leq \varepsilon < 1, \end{aligned} \quad (3.47)$$

представляющий собой $\mathfrak{D}$ -преобразование. Если подставить (46) в (47), то получим

$$e^{-q\varepsilon} F^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k \varepsilon} W\left(\frac{q}{T} + \frac{2\pi}{T} ki\right). \quad (3.48)$$

Если положить здесь

$$q = \lambda T, \quad \varepsilon = \frac{t}{T},$$

то правая часть полученного выражения совпадает с выражением (21) для СИЧХ и

$$F^*\left(\lambda T, \frac{t}{T}\right) = e^{\lambda t} \varphi(T, \lambda, t). \quad (3.49)$$

Обратно, из (49) получаем

$$F^*(q, \varepsilon) = e^{q\varepsilon} \varphi\left(T, \frac{q}{T}, \varepsilon T\right). \quad (3.50)$$

Несмотря на тесную связь, функции φ и F^* существенно отличаются во временной области, так как функция φ периодична по t , а функция F^* по ε , очевидно, непериодична.

Пример 3.1. Приведем основные свойства импульсно-частотных характеристик для системы с дробно-

рациональной передаточной функцией (1.26). В общем случае разложение передаточной функции (1.26) на простые дроби имеет вид

$$\frac{m(p)}{d(p)} = \frac{m_1 p^{n-1} + \dots + m_n}{p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n} = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(p - p_i)^k}, \quad (3.51)$$

где

$$c_{ik} = \frac{1}{(v_i - k)!} \frac{d^{v_i - k}}{dp^{v_i - k}} \left(\frac{m(p)(p - p_i)^{v_i}}{d(p)} \right)_{p=p_i}. \quad (3.52)$$

В частности, если корни p_i простые, то разложение (51) упрощается:

$$\frac{m(p)}{d(p)} = \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{1}{p - p_\rho} = \sum_{\rho=1}^n \gamma_\rho \frac{1}{p - p_\rho}. \quad (3.53)$$

Из (21) следует, что в рассматриваемом случае СИЧХ определяется рядом

$$\varphi(T, \lambda, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{m(\lambda + ki\omega)}{d(\lambda + ki\omega)} e^{ki\omega t}. \quad (3.54)$$

Покажем, что в общем случае, когда имеет место разложение (51), справедлива формула

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t) &= \tilde{\varphi}(T, \lambda, t) = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{(p_i - \lambda)t}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}}, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Для доказательства формулы (55) найдем разложение в ряд Фурье периодической функции

$$\varphi(T, \lambda, t) = \varphi(T, \lambda, t + T), \quad \varphi(T, \lambda, t) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, t), \quad (3.56)$$

$$0 \leq t < T.$$

Пусть

$$\varphi(T, \lambda, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ki\omega t}. \quad (3.57)$$

где

$$\varphi_k = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\varphi}(T, \lambda, \tau) e^{-k i \omega \tau} d\tau. \quad (3.58)$$

Подставляя (55) в (58), находим

$$\varphi_k = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \int_0^T \frac{e^{(p_i - \lambda)\tau} \cdot e^{-k i \omega \tau}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}} d\tau. \quad (3.59)$$

Вычисление интегралов в правой части этого равенства дает

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{e^{(-\lambda + p_i - k i \omega)\tau}}{1 - e^{(-\lambda + p_i)T}} d\tau &= \\ &= \frac{1}{-\lambda + p_i - k i \omega} \frac{e^{(-\lambda + p_i - k i \omega)T} - 1}{1 - e^{(-\lambda + p_i)T}} = \frac{1}{\lambda - p_i + k i \omega}, \end{aligned}$$

так как

$$e^{-k i \omega T} = e^{-2k\pi l} = 1.$$

Поэтому из очевидного тождества

$$\frac{1}{(\lambda - p_i + k i \omega)^s} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dp_i^{s-1}} \frac{1}{\lambda - p_i + k i \omega}$$

следует, что

$$\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \int_0^T \frac{e^{(-\lambda + p_i - k i \omega)\tau}}{1 - e^{(-\lambda + p_i)T}} d\tau = \frac{1}{(\lambda - p_i + k i \omega)^k}.$$

С учетом найденных соотношений выражение для φ_k принимает вид

$$\varphi_k = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(\lambda - p_i + k i \omega)^k} = \frac{1}{T} \frac{m(\lambda + k i \omega)}{d(\lambda + k i \omega)}.$$

Отсюда и вытекает, что функция (57) имеет вид (54), и, следовательно, формула (55) действительно справедлива.

Соотношение (55) существенно упрощается, если полюсы передаточной функции простые. Тогда имеет место разложение на простые дроби (53) и (55) принимает вид

$$\varphi(T, \lambda, t) = \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{(p_\rho - \lambda)t}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}}, \quad 0 < t < T. \quad (3.60)$$

Отметим два общих свойства функции (54).

1. Если разность степеней числителя и знаменателя передаточной функции (51) равна $r > 1$, то соответствующая функция $\varphi(T, \lambda, t)$ непрерывна относительно t со своими производными до $(r-2)$ -й включительно. Если же $m_1 \neq 0$, т. е. разность степеней полиномов $d(p)$ и $m(p)$ равна единице, то функция $\varphi(T, \lambda, t)$ имеет разрывы первого рода в точках $t = kT$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$).

Для доказательства сформулированных утверждений отметим сначала, что на интервалах, не содержащих точек $t = kT$, функция $\varphi(T, \lambda, t)$ непрерывна по t со всеми производными, что следует из (55).

Рассмотрим теперь поведение функции $\varphi(T, \lambda, t)$ в точках $t = kT$. Очевидно, если $\tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, T)$, то функция $\varphi(T, \lambda, t)$ непрерывна. В противном случае, при $\tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) \neq \tilde{\varphi}(T, \lambda, T)$, функция $\varphi(T, \lambda, t)$ в точках $t = kT$ имеет разрыв, равный

$$\Delta\varphi = \tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) - \tilde{\varphi}(T, \lambda, T).$$

Но по (55)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}(T, \lambda, 0) &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{1}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}}, \\ \tilde{\varphi}(T, \lambda, T) &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{(p_i - \lambda)T}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Учитывая, что

$$\frac{e^{(p_i - \lambda)T}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}} = -1 + \frac{1}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}}, \quad (3.62)$$

из (61) сразу получаем, что

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^l c_{i1}. \quad (3.63)$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{i=1}^l c_{i1} = m_1. \quad (3.64)$$

Для доказательства этого соотношения достаточно привести все слагаемые в правой части (51) к общему знаменателю и выполнить сложение.

Таким образом, из (63), (64) имеем

$$\Delta\varphi = m_1,$$

что и доказывает вторую часть сформулированного выше утверждения.

Пусть теперь передаточная функция (51) имеет вид

$$W(p) = \frac{b_s p^{n-s} + \dots + b_n}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad s \geq 2.$$

Докажем, что соответствующая функция $\varphi(T, \lambda, t)$ имеет $s-2$ непрерывные производные по t .

Пусть

$$\bar{W}(p) = pW(p);$$

соответствующая этой передаточной функции СИЧХ

$$\bar{\varphi}(T, \lambda, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda + ki\omega) W(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega t},$$

по доказанному, является непрерывной функцией t , так как разность степеней числителя и знаменателя $\bar{W}(p)$ больше единицы. Но предыдущее выражение можно переписать в виде

$$\frac{d\varphi(T, \lambda, t)}{dt} = \bar{\varphi}(T, \lambda, t) - \lambda\varphi(T, \lambda, t).$$

Так как в правой части стоит непрерывная функция t , то и левая часть такова же. Таким образом, мы доказали существование непрерывной производной $\frac{d\varphi(T, \lambda, t)}{dt}$. Продолжая рассуждение аналогичным

образом и рассматривая передаточные функции $p^2 W(p)$, $p^3 W(p)$ и т. п., мы докажем требуемое.

2. Рассмотрим теперь поведение ряда (54) в точках $t = kT$. Из общего свойства рядов Фурье (29) следует, что

$$\varphi(T, \lambda, 0) = \varphi(T, \lambda, kT) = \frac{\bar{\varphi}(T, \lambda, 0) + \bar{\varphi}(T, \lambda, T)}{2}.$$

Подставляя сюда (61), находим

$$\varphi(T, \lambda, 0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{1 + e^{(p_i - \lambda)T}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}}. \quad (3.65)$$

Учитывая, что

$$\frac{1 + e^{qT}}{1 - e^{qT}} = -\operatorname{cth} \frac{qT}{2},$$

предыдущее соотношение можно также переписать в виде

$$\varphi(T, \lambda, 0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \operatorname{cth} \frac{(\lambda - p_i)T}{2}. \quad (3.66)$$

Отметим, что соотношения (65), (66) справедливы независимо от величины m_1 .

Учитывая связь между функциями $\varphi(T, \lambda, t)$ и $\varphi(T, t)$, можно сразу же определить основные свойства функции $\varphi(T, t)$. Для этого достаточно в полученных формулах положить $\lambda = 0$. В результате получаем следующие свойства ИЧХ $\varphi(T, t)$ для системы с передаточной функцией (51).

Прежде всего, из (55) имеем

$$\varphi(T, t) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i t}}{1 - e^{p_i t}}, \quad 0 \leq t < T. \quad (3.67)$$

Кроме того, из (66) при $\lambda = 0$ получаем

$$\varphi(T, 0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \operatorname{cth} \frac{p_i T}{2}. \quad (3.68)$$

При этом относительно непрерывности функции $\varphi(T, t)$ и ее дифференцируемости справедливо утверждение, доказанное выше для функции $\varphi(T, \lambda, t)$.

Из общего соотношения (36) и (55) следует также, что

$$\varphi(T, \lambda, t - \tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{(p_i - \lambda)(t - \tau + T)}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}} + \\ + e^{-\lambda(t - \tau)} h(t - \tau), & 0 < t - \tau < T, \\ \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{(p_i - \lambda)(t - \tau + T)}}{1 - e^{(p_i - \lambda)T}}, \\ -T < t - \tau < 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

где весовая функция h определяется формулой (1.27).

В случае простых корней

$$\varphi(T, \lambda, t - \tau) = \begin{cases} \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{(p_\rho - \lambda)(t - \tau + T)}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} + e^{-\lambda(t - \tau)} h(t - \tau), \\ 0 < t - \tau < T, \\ \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{(p_\rho - \lambda)(t - \tau + T)}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}}, & -T < t - \tau < 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

При $\lambda = 0$ из (70) получается

$$\varphi(T, t - \tau) = \begin{cases} \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{p_\rho(t - \tau + T)}}{1 - e^{p_\rho T}} + h(t - \tau), & 0 < t - \tau < T, \\ \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{p_\rho(t - \tau + T)}}{1 - e^{p_\rho T}}, & -T < t - \tau < 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Отметим также, что, используя найденную выше связь между СИЧХ и $\mathfrak{D}$ -преобразованием, основные свойства СИЧХ, установленные в настоящем параграфе, можно

было получить как следствие общих теорем, приведенных в [103].

Приведем также несколько основных формул, связанных с вычислением функции $\psi(T, t)$ (13). Можно показать [75], что для системы с передаточной функцией (51)

$$\begin{aligned}\psi(T, t) &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i t}}{1 + e^{p_i \frac{T}{2}}} = \\ &= \tilde{\psi}(T, t), \quad 0 < t < \frac{T}{2}. \quad (3.72)\end{aligned}$$

В частности, в случае (53)

$$\begin{aligned}\psi(T, t) &= \tilde{\psi}(T, t) = \\ &= \sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{p_\rho t}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}}, \quad 0 < t < \frac{T}{2}. \quad (3.73)\end{aligned}$$

Кроме того, если a — произвольное число, такое, что

$$-s \leq \frac{2a}{T} < 1 - s,$$

то

$$\psi(T, a) = (-1)^s \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i \left(a + s \frac{T}{2}\right)}}{1 + e^{p_i \frac{T}{2}}}. \quad (3.74)$$

В частности,

$$\begin{aligned}\psi(T, t - \tau) &= \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i (t - \tau)}}{1 + e^{p_i \frac{T}{2}}}, & 0 < t - \tau < \frac{T}{2}, \\ - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i \left(t - \tau + \frac{T}{2}\right)}}{1 + e^{p_i \frac{T}{2}}}, & -\frac{T}{2} < t - \tau < 0. \end{cases} \quad (3.75)\end{aligned}$$

При этом можно показать, аналогично (35), что

$$-\tilde{\psi}\left(T, t-\tau+\frac{T}{2}\right)=\tilde{\psi}(T, t-\tau)-h(t-\tau). \quad (3.76)$$

Поэтому из (75) имеем

$$\psi(T, t-\tau)=\begin{cases} -\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i(t-\tau+\frac{T}{2})}}{1+e^{p_i \frac{T}{2}}} + h(t-\tau), \\ \quad 0 < t-\tau < \frac{T}{2}, \\ -\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{v_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp_i^{k-1}} \frac{e^{p_i(t-\tau+\frac{T}{2})}}{1+e^{p_i \frac{T}{2}}}, \\ \quad -\frac{T}{2} < t-\tau < 0. \end{cases} \quad (3.77)$$

Отсюда в случае простых корней (53) получается

$$\psi(T, t-\tau)=\begin{cases} -\sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{p_\rho(t-\tau+\frac{T}{2})}}{1+e^{p_\rho \frac{T}{2}}} + h(t-\tau), \\ \quad 0 < t-\tau < \frac{T}{2}, \\ -\sum_{\rho=1}^n \frac{m(p_\rho)}{d'(p_\rho)} \frac{e^{p_\rho(t-\tau+\frac{T}{2})}}{1+e^{p_\rho \frac{T}{2}}}, \quad -\frac{T}{2} < t-\tau < 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

В заключение параграфа приведем несколько соотношений, относящихся к случаю резонанса и необходимых для дальнейшего изложения.

Рассмотрим уравнение (38) в предположении, что $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — целые функции своего аргумента.

Будем называть систему (37) *резонансной на частотах* $k_p\omega$, где k_p — целые числа, если

$$W_1(k_p i\omega)=0, \quad W_2(k_p i\omega) \neq 0. \quad (3.79)$$

Из первого равенства (79) и (2) вытекает, что уравнение

$$d(p)y = 0 \quad (3.80)$$

имеет среди своих решений функции

$$y_c = e^{ki\omega t}, \quad k \in \mathcal{K}_p, \quad (3.81)$$

где $\mathcal{K}_p$ — множество чисел k_p .

Если предположить, что на вход системы (37), при выполнении (79), действует периодический входной сигнал (3), то, отыскивая решение в виде (39), снова придем к соотношениям (40), из которых при $k \notin \mathcal{K}_p$ получится

$$y_k = \frac{W_2(ki\omega)}{W_1(ki\omega)} x_k. \quad (3.82)$$

При $k \in \mathcal{K}_p$ из (40) и (79) имеем

$$x_k = 0, \quad k \in \mathcal{K}_p. \quad (3.83)$$

Соотношения (83) являются необходимыми и достаточными условиями существования периодического решения уравнения (38) в случае резонанса. Легко заметить, что здесь мы столкнулись с частным случаем ситуации, рассмотренной в конце § 8 гл. I и приведшей к соотношениям (I.8.13).

Если соотношения (83) выполнены, то выражение

$$y_B = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \notin \mathcal{K}_p}}^{\infty} W(ki\omega) x_k e^{ki\omega t} \quad (3.84)$$

будет частным периодическим решением уравнения (37). Если при всех $k \notin \mathcal{K}_p$ выполнены условия (6), то ряд

$$\varphi_B(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \notin \mathcal{K}_p}}^{\infty} W(ki\omega) e^{ki\omega t} \quad (3.85)$$

будет являться обобщенной периодической функцией, и формулу (84) можно представить в виде, аналогичном (8):

$$y_B = \int_0^T \varphi_B(T, t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^T \varphi_B(T, \tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.86)$$

Прибавляя к (86) периодические решения однородного уравнения, имеющие вид (81), получим все семейство периодических решений уравнения (37) в резонансном случае в виде

$$y = \sum_{k \in \mathcal{K}_p} c_k e^{ki\omega t} + \int_0^T \varphi_B(T, t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (3.87)$$

где c_k — произвольные постоянные, причем слагаемое, представленное интегралом, не содержит резонансных частот.

§ 4. Линейные периодические операторы и их свойства

Линейные операторы, не обладающие свойством стационарности (1.9), называются *нестационарными*. В настоящем параграфе изучаются свойства одного класса нестационарных линейных операторов, называемых *непериодическими*.

Рассмотрим выражение

$$y = \sum_k a_k(t) (h_k * x), \quad (4.1)$$

где h_k — заданные обобщенные функции, а $a_k(t)$ — обыкновенные функции, такие, что выражение (1) имеет смысл и является обобщенной функцией для всех входных сигналов x из изучаемого класса.

Если рассматривать формулу (1) как соответствие между входными сигналами x и выходными y , то она определяет оператор

$$y = U(x), \quad (4.2)$$

который, очевидно, удовлетворяет условиям (1.2) и, следовательно, является линейным. В то же время условие (1.9) для оператора (2) не выполнено, и, следовательно, формула (1) определяет линейный нестационарный оператор.

Следует отметить, что выражение (1) является весьма общим и охватывает большое число реальных операторов, описывающих элементы и системы автоматического управления. Достаточно сказать, что частным

случае (1) является нестационарный дифференциально-разностный оператор

$$y = \sum_k a_k(t) x^{(k)}(t - \tau_k), \quad \tau_k > 0, \quad (4.3)$$

где $a_k(t)$ — переменные коэффициенты, τ_k — постоянные и дифференцирование понимается в обобщенном смысле. Действительно, если вспомнить, что

$$x^{(k)}(t - \tau_k) = \delta^{(k)}(t - \tau_k) * x,$$

то из (3) будем иметь

$$y = \sum_k a_k(t) [\delta^{(k)}(t - \tau_k) * x], \quad (4.4)$$

что представляет собой частный случай (1). Подчеркнем, что менять порядок умножения и свертывания в (1) нельзя. Это следует из того, что операции умножения и свертки не ассоциативны (§ 5 гл. I).

Если входной сигнал в (1) — обыкновенная функция, то, пользуясь формулой (1.15), имеем

$$h_k * x = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

и, следовательно, из (1) получаем

$$y = \sum_k a_k(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (4.5)$$

где

$$h(t, \tau) = \sum_k a_k(t) h_k(t - \tau). \quad (4.6)$$

Выражение (6) является весовой функцией оператора (1). Действительно, как уже говорилось, весовая функция $h(t, \tau)$ произвольного линейного оператора (2) определяется формулой

$$h(t, \tau) = U[\delta(t - \tau)].$$

Но, подставляя в (1) $x = \delta(t - \tau)$, сразу, по (I.5.14), получим (6), так что $h(t, \tau)$ — действительно весовая функция оператора (1).

Оператор (1) называется *физически реализуемым*, если его весовая функция (6) обладает свойством

$$h(t, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad t < \tau. \quad (4.7)$$

Легко убедиться, что условие физической реализуемости (7) для весовой функции (6) будет заведомо выполняться в том случае, когда

$$h_k(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \quad (4.8)$$

при всех k . Действительно, если выполнено (8), то

$$a_k(t) h_k(t - \tau) = 0 \quad \text{при} \quad t < \tau, \quad (4.9)$$

откуда сразу вытекает (7).

В случае выполнения условия физической реализуемости формула (5) принимает вид

$$y = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (4.10)$$

Если же в дополнение к (7) $x(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$y = \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Напомним, что формулы (5), (10) и (11) имеют смысл, если входной сигнал x — обыкновенная функция. Для входных сигналов, являющихся обобщенными функциями, связь между входными и выходными сигналами определяется формулой (1).

Во многих работах по теории управления формулами (5), (10) и (11) часто пользуются и при входных сигналах, являющихся обобщенными функциями. Строго говоря, этого делать нельзя. Однако мы в конечном итоге будем приходить к правильным результатам, если эти формулы понимать в смысле соотношения (1).

Помимо весовой функции, важнейшей характеристикой линейного оператора (1) является его передаточная функция, определяемая формулой (1.7):

$$W(p, t) = e^{-pt} U(e^{pt}). \quad (4.12)$$

В отличие от стационарного случая, передаточная функция нестационарного линейного оператора, кроме

аргумента p , зависит еще, как от параметра, от аргумента t . Поэтому часто выражение (12) называют параметрической передаточной функцией оператора (2). Мы, однако, для краткости будем пользоваться термином «передаточная функция».

Если предположить, что обобщенные функции h_k имеют преобразование Лапласа, то, используя (12), нетрудно найти передаточную функцию оператора (1). Действительно, полагая $x = e^{pt}$, из (1) имеем

$$U(e^{pt}) = \sum_k a_k(t) (h_k * e^{pt}).$$

Но, как уже было ранее,

$$h_k * e^{pt} = e^{pt} W_k(p),$$

где

$$W_k(p) = \langle h_k, e^{-pt} \rangle = L(h_k)$$

— преобразование Лапласа функции h_k . Поэтому находим передаточную функцию в виде

$$W(p, t) = \sum_k a_k(t) W_k(p). \quad (4.13)$$

Часто для сокращения формул уравнение оператора (1) будем записывать в виде

$$y = W(p, t) x. \quad (4.14)$$

Запись (14) означает, во-первых, что задан линейный оператор вида (1), передаточная функция которого (12) равна $W(p, t)$, и, во-вторых, что если $x = e^{pt}$, то

$$y = e^{pt} W(p, t). \quad (4.15)$$

При таком подходе дифференциально-разностный оператор (3) записывается в виде (14), причем передаточная функция $W(p, t)$ имеет вид

$$W(p, t) = \sum_k a_k(t) p^k e^{-p\tau_k}. \quad (4.16)$$

Во всем дальнейшем изложении основное значение будет иметь один конкретный класс нестационарных линейных операторов вида (1), называемых периодическими.

Линейный оператор (1) называется *периодическим*, если существует число T такое, что для любого входного сигнала из равенства (2) следует

$$y(t - T) = U[x(t - T)]. \quad (4.17)$$

Имеет место следующее основное свойство линейного периодического оператора:

Для того чтобы оператор вида (1) был периодическим, необходимо и достаточно, чтобы его передаточная функция была периодична по t с периодом T :

$$W(p, t) = W(p, t - T). \quad (4.18)$$

Докажем сначала необходимость, т. е. что из (17) следует (18). Для этого предположим, что $x = e^{pt(t-T)} = e^{pt}e^{-pT}$. С одной стороны, используя линейность оператора и (15), имеем

$$U[e^{p(t-T)}] = e^{-pT}U(e^{pt}) = e^{p(t-T)}W(p, t);$$

с другой стороны, из (15) и (17) следует

$$U[e^{p(t-T)}] = e^{p(t-T)}W(p, t - T).$$

Сравнивая два последних выражения, приходим к необходимости условия (18). Отметим, что при доказательстве необходимости условия (18) конкретный вид оператора (2) не был использован.

Докажем теперь достаточность условия (18) для периодичности, т. е. что для оператора (1) из условия (18) следует (17). Пусть (18) выполнено; тогда можно считать все коэффициенты в (13) периодическими, т. е.

$$a_k(t) = a_k(t - T). \quad (4.19)$$

Пусть теперь для некоторого фиксированного $x = \bar{x}$

$$\bar{y} = \sum_k a_k(t) (h_k * \bar{x}).$$

Если же $x = \bar{x}(t - T)$, то соответствующий выходной сигнал равен, в силу (19) и свойств свертки,

$$\begin{aligned} \sum_k a_k(t) [h_k * \bar{x}(t - T)] &= \sum_k a_k(t - T) [h_k(t - T) * \bar{x}] = \\ &= \bar{y}(t - T). \end{aligned}$$

Сравнение двух последних выражений и приводит к равенству (17).

Из сказанного следует также, что оператор (1) будет периодичным в том и только в том случае, когда все коэффициенты в выражении (1) периодичны, т. е. выполнено условие (19). В частности, дифференциально-разностный оператор (3) будет периодичным тогда и только тогда, когда периодичны его коэффициенты.

Установим теперь связь между весовой функцией и передаточной функцией оператора (1). Непосредственно из (5) и (12) имеем

$$W(p, t) = e^{-pt} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{p\tau} d\tau. \quad (4.20)$$

Если весовая функция обладает свойством физической реализуемости (7), то из (20) имеем

$$W(p, t) = e^{-pt} \int_{-\infty}^t h(t, \tau) e^{p\tau} d\tau = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) e^{-p(t-\tau)} d\tau.$$

Замена переменной в последнем интеграле приводит к равенству

$$W(p, t) = \int_0^{\infty} h(t, t - \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (4.21)$$

где, в соответствии с (6),

$$h(t, t - \tau) = \sum_k a_k(t) h_k(\tau). \quad (4.22)$$

Обратно, если задана передаточная функция $W(p, t)$ (13), то, фиксируя t , вычислим обратное преобразование

$$g(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p\tau} dp = L^{-1}[W(p, t)]. \quad (4.23)$$

Тогда весовая функция определится соотношением

$$h(t, \tau) = g(t, t - \tau), \quad (4.24)$$

причем, очевидно,

$$g(t, \tau) = h(t, t - \tau), \quad (4.25)$$

где функция, стоящая в правой части, задается равенством (22). Справедливость соотношений (23) — (25) следует из непосредственного сопоставления выражений (6) и (13).

Передаточная функция (21) выражается через функцию $g(t, \tau)$ особенно просто:

$$W(p, t) = \int_0^{\infty} g(t, \tau) e^{-p\tau} d\tau = L_{\tau}[g(t, \tau)], \quad (4.26)$$

где индекс τ означает, что преобразование Лапласа берется по переменной τ .

Так же, как и весовая функция, функция $g(t, \tau)$ имеет определенный физический смысл и представляет собой реакцию системы в момент t на единичный мгновенный импульс, приложенный на τ единиц времени раньше, т. е. в момент $t - \tau$ [24].

Отметим, что для периодической системы из (23) следует

$$g(t, \tau) = g(t - T, \tau). \quad (4.27)$$

Действительно, из (23) с учетом (18) имеем

$$\begin{aligned} g(t - T, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t - T) e^{p\tau} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p\tau} dp = g(t, \tau). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Равенство (28) также непосредственно следует из (22) и (19).

Обратно, если выполнено (27), то из (26) следует (18), т. е. условие (27) является необходимым и достаточным для периодичности системы. Через весовую функцию условие (27) выражается следующим образом:

$$h(t - T, \tau - T) = h(t, \tau). \quad (4.29)$$

Нетрудно убедиться, что равенство (29) также является необходимым и достаточным условием периодичности системы.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие системы, передаточные функции которых при всех p , не являющихся особыми точками передаточных функций $W_k(p)$, представляют собой обыкновенные ограниченные периодические функции аргумента t , удовлетворяющие обычным условиям [101] разложимости в ряд Фурье. При таком предположении практическое вычисление интеграла обращения в (23) может быть выполнено следующим образом. Передаточная функция $W(p, t)$ представляется рядом Фурье по переменной t :

$$W(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega t} W_k(p), \quad (4.30)$$

где

$$W_k(p) = \frac{1}{T} \int_0^T W(p, \tau) e^{-ki\omega \tau} d\tau. \quad (4.31)$$

Если $h_k = L^{-1}[W_k(p)]$ — оригиналы, соответствующие изображениям $W_k(p)$ и вычисляемые обычным образом, то по (23) и (25)

$$g(t, \tau) = h(t, t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(\tau) e^{ki\omega t}, \quad (4.32)$$

и, следовательно, весовая функция имеет вид

$$h(t, \tau) = g(t, t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(t - \tau) e^{ki\omega t}. \quad (4.33)$$

Представление передаточной и весовой функций периодического линейного оператора в виде (30), (33) будем называть *каноническим*. В конкретных задачах каноническое представление может существенно упрощаться.

Перейдем к вопросу об установлении факта физической реализуемости оператора непосредственно по виду его передаточной функции. Имеет место следующее утверждение: для того чтобы оператор (2) при сделанных предположениях был физически реализуемым, достаточно, чтобы существовало не зависящее от t число C такое, чтобы передаточная функция $W(p, t)$ была

аналитической функцией p при $\operatorname{Re} p > C$ и чтобы при этих p было справедливо неравенство

$$|W(p, t)| < k|p|^s, \quad (4.34)$$

где s — некоторое целое число, k — произвольная постоянная. Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из общего условия (I.6.4), а также формул (26) и (23).

Из всего сказанного следует, что передаточная функция линейного периодического оператора, если считать t фиксированным параметром, обладает многими свойствами, аналогичными свойствам обычной передаточной функции линейного стационарного оператора. Покажем теперь, что для нестационарного оператора (1) имеют место соотношения, аналогичные (1.28) — (1.30). Именно, если уравнение оператора U имеет вид (2) и $x = e^{\lambda t}z$, то $y = e^{\lambda t}u$, при этом u и z связаны соотношением

$$u = \sum_k a_k(t) [(e^{-\lambda t} h_k) * z], \quad (4.35)$$

которое при использовании записи (1.4) имеет вид

$$u = W(p + \lambda, t)z. \quad (4.36)$$

Доказательство формулы (36) можно сразу получить, подставляя $x = e^{\lambda t}z$ в (1) и применяя формулу (1.35).

§ 5. Линейные периодические системы

Систему, описываемую уравнением вида

$$U_1(y) = U_2(x), \quad (5.1)$$

где U_1 и U_2 — произвольные линейные нестационарные операторы, в дальнейшем будем называть *линейной нестационарной системой*. Если операторы U_1 и U_2 периодические, то систему (1) будем называть *линейной периодической системой*.

В дальнейшем будем предполагать, что операторы U_1 и U_2 сводятся к (4.1), т. е. уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\sum_k a_k(t) (h_k * y) = \sum_s b_s(t) (g_s * x), \quad (5.2)$$

где h_k, g_s — некоторые обобщенные функции, а коэффициенты являются обыкновенными периодическими функциями

$$a_k(t) = a_k(t + T), \quad b_s(t) = b_s(t + T). \quad (5.3)$$

Если ввести в рассмотрение передаточные функции операторов U_1 и U_2

$$\left. \begin{aligned} a(p, t) &= \sum_k a_k(t) L(h_k), \\ b(p, t) &= \sum_s b_s(t) L(g_s), \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где, как и ранее, L — символ преобразования Лапласа, то вместо (2) также будем писать

$$a(p, t) y = b(p, t) x. \quad (5.5)$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, если не будет оговорено обратное, что операторы U_1 и U_2 — физически реализуемые и такие, что передаточные функции (4) действительно существуют.

Частным случаем уравнения (5) является линейное дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(n-k)}(t - \tau_k) = \sum_{s=0}^m b_s(t) x^{(m-s)}(t - \nu_s), \quad (5.6)$$

$$\tau_k \geq 0, \quad \nu_s \geq 0,$$

где τ_k, ν_s — постоянные, а производные понимаются в смысле теории обобщенных функций. В данном случае по (4.16)

$$\left. \begin{aligned} a(p, t) &= \sum_{k=0}^n a_k(t) p^{n-k} e^{-p\tau_k}, \\ b(p, t) &= \sum_{s=0}^m b_s(t) p^{m-s} e^{-p\nu_s}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

причем система (6) будет периодической, если выполнено условие (3). Как и в стационарном случае, уравнение (2) определяет связь между x и y не однозначно, а с точностью до решения однородного уравнения. Действительно, если $y(x)$ — произвольное решение уравне-

ния (2), а y_c — произвольное решение однородного уравнения

$$a(p, t) y_c = 0, \quad (5.8)$$

то сумма $y_c + y(x)$ — также решение уравнения (2). Отсюда следует, что уравнение (2) определяет целое множество операторов $y = F(x)$, в общем случае не являющихся линейными. Поэтому возникает вопрос о том, что считать передаточной и весовой функциями системы, описываемой уравнением (2). Этому вопросу и посвящен, в основном, данный параграф.

Покажем, прежде всего, что, зная реакцию системы (2) на входное воздействие в виде δ -функции, можно найти ее реакцию на произвольный входной сигнал. Пусть в (2) $x = \delta(t - \xi)$, где величина ξ является параметром; тогда, обозначив выход через $h(t, \xi)$, имеем из (2)

$$\sum_k a_k(t) [h_k * h(t, \xi)] = \sum_s b_s(t) g_s(t - \xi). \quad (5.9)$$

Пусть $h(t, \xi)$ — произвольное частное решение уравнения (9), являющееся обобщенной функцией по t и зависящее от параметра ξ . Подстановка $h(t, \xi)$ в уравнение (9) превращает его в тождество. Пусть теперь $x_{\text{вх}}(t)$ — входной сигнал, являющийся обыкновенной функцией. Тогда, умножая тождество (9) на $x(\xi)$ и интегрируя по ξ , получим

$$\begin{aligned} \sum_k a_k(t) \left(h_k * \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \xi) x(\xi) d\xi \right) = \\ = \sum_s b_s(t) \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t - \xi) x(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Если ввести обозначение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \xi) x(\xi) d\xi \quad (5.11)$$

и учесть, что по (I.5.28)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_s(t - \xi) x(\xi) d\xi = q_s * x,$$

то предыдущее тождество можно переписать в виде

$$\sum_k a_k(t) (h_k * y) = \sum_s b_s(t) (g_s * x),$$

откуда следует, что выражение (11) представляет собой решение уравнения (2).

Ниже будет показано, что в интересующих нас задачах обобщенная функция $h(t, \xi)$ будет иметь структуру, аналогичную (4.6), т. е.

$$h(t, \xi) = \sum_k c_k(t) d_k(t - \xi), \quad (5.12)$$

где $c_k(t)$ — обыкновенные функции, d_k — обобщенные функции. Если (12) имеет место, то из (11) следует, что

$$y = \sum_k c_k(t) \int_{-\infty}^{\infty} d_k(t - \xi) x(\xi) d\xi = \sum_k c_k(t) (d_k * x). \quad (5.13)$$

В такой форме решение y имеет смысл и для входных сигналов, являющихся обобщенными функциями.

Сравнивая (11) и (4.5), мы видим, что любое частное решение уравнения (9) определяет линейный оператор (дающий зависимость выхода от входа), весовой функцией которого является $h(t, \xi)$.

Чтобы избежать этого произвола, мы всегда будем рассматривать решение уравнения (9), обладающее свойством физической реализуемости, т. е. такое, что

$$h(t, \xi) = 0 \quad \text{при} \quad t < \xi. \quad (5.14)$$

Это решение мы и будем называть весовой функцией системы (2). При этом нужно иметь в виду следующее.

1. В общем случае такое решение может и не существовать. Мы, однако, таких задач рассматривать не будем. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только системы, для которых существует решение уравнения (9), удовлетворяющее условию физической реализуемости.

2. При выводе соотношения (10) изменен порядок свертывания и интегрирования по параметру, т. е. фактически использовалось предположение об ассоциативности свертки. Для произвольного решения $h(t, \xi)$ это

может оказаться несправедливым. Однако если $h(t, \xi)$ — решение, удовлетворяющее условию физической реализуемости, то законность всех проведенных операций нетрудно доказать.

При таком определении весовой функции будем иметь, аналогично (4.10),

$$y = \int_{-\infty}^t h(t, \xi) x(\xi) d\xi. \quad (5.15)$$

Передаточную функцию линейного оператора (15) будем называть передаточной функцией системы (2). Используя (4.20), находим, что передаточная функция системы (2) равна (если она существует)

$$W(p, t) = \int_{-\infty}^t h(t, \xi) e^{-p(t-\xi)} d\xi = \int_0^{\infty} h(t, t-\xi) e^{-p\xi} d\xi. \quad (5.16)$$

Учитывая, что $h(t, \xi)$ является решением (9), найдем уравнение, которому удовлетворяет передаточная функция $W(p, t)$. Умножая уравнение (9) на $e^{\lambda\xi}$ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \sum_k a_k(t) \left[h_k * \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \xi) e^{\lambda\xi} d\xi \right] = \\ = \sum_s b_s(t) \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t-\xi) e^{\lambda\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Фактически, если выполнены условия физической реализуемости, интегралы вычисляются в пределах от $-\infty$ до t . При этом из (15) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \xi) e^{\lambda\xi} d\xi = \int_{-\infty}^t h(t, \xi) e^{\lambda\xi} d\xi = e^{\lambda t} W(\lambda, t) \quad (5.18)$$

и, кроме того,

$$\int_{-\infty}^t g_s(t-\xi) e^{\lambda\xi} d\xi = e^{\lambda t} L(g_s), \quad (5.19)$$

где $L(g_s)$ — соответствующее преобразование Лапласа. С учетом (18) и (19) уравнение (17) приобретает вид

$$\sum_k a_k(t) [h_k * e^{\lambda t} W(\lambda, t)] = e^{\lambda t} \sum_s b_s(t) L(g_s).$$

Если учесть дополнительно, что по (1.31)

$$h_k * e^{\lambda t} W(\lambda, t) = e^{\lambda t} [(e^{-\lambda t} h_k) * W(\lambda, t)],$$

то окончательно получим

$$\sum_k a_k(t) [(e^{-\lambda t} h_k) * W(\lambda, t)] = \sum_s b_s(t) L(g_s). \quad (5.20)$$

Это и есть искомое уравнение. Его можно представить в более удобном виде. Для этого заметим, что уравнение (20) можно считать частным случаем (2) и применить к нему форму записи (5). При этом легко убедиться, что уравнение (20) представляется в виде

$$a(p + \lambda, t) W(\lambda, t) = b(\lambda, t), \quad (5.21)$$

где $a(p, t)$, $b(p, t)$ даются соотношениями (4). В уравнении (21) величина λ является параметром. Решая это уравнение, мы, вообще говоря, можем найти передаточную функцию $W(\lambda, t)$.

В случае уравнения (6) выражение для передаточной функции (21) имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=0}^n a_k(t) (p + \lambda)^{n-k} e^{-(p+\lambda) \tau_k} \right] W(\lambda, t) = \\ = \sum_{s=0}^m b_s(t) \lambda^{m-s} e^{-\lambda \nu_s}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где λ — параметр, p — оператор обобщенного дифференцирования.

Практически уравнение (21) может быть сразу получено из исходного уравнения (2), если положить

$$x = e^{\lambda t}, \quad y = e^{\lambda t} W(\lambda, t). \quad (5.23)$$

В частности, с помощью такой замены уравнение (22) получается из (6). Заметим теперь, что уравнение (21), являясь частным случаем (2), определяет решение $W(\lambda, t)$ не однозначно, а с точностью до решений однородного уравнения. Поэтому снова возникает во-

прос, какое из решений уравнения (21) следует считать передаточной функцией системы (2). Этот вопрос может быть решен однозначно. Передаточной функцией системы (2) мы будем называть решение уравнения (21), периодичное по t с периодом T :

$$W(\lambda, t) = W(\lambda, t - T). \quad (5.24)$$

Ниже будет показано, что для широких классов систем такое решение всегда имеется и единственно. Если полученная таким образом функция $W(\lambda, t)$ (24) при $\operatorname{Re} \lambda > C$ аналитична по λ и удовлетворяет условию (4.34), то она будет, как функция p , являться преобразованием Лапласа обобщенной функции $g(t, \tau)$ такой, что $g(t, \tau) = 0$ при $\tau < 0$. При этом

$$g(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p\tau} dp$$

и функция

$$h(t, \tau) = g(t, t - \tau)$$

будет удовлетворять уравнению (9) и условию физической реализуемости, т. е. будет являться весовой функцией системы.

Последнее утверждение может быть доказано сразу, если предположить, что $W(p, t)$ имеет обратное преобразование Лапласа, и применить в обратном порядке выкладки, приведшие к уравнению (21).

Для практического применения всего сказанного следовало бы выделить общие классы систем, для которых периодическое по t решение уравнения (21) существует и обладает указанными свойствами. Некоторые общие соображения по этому поводу будут приведены ниже. Однако во всех конкретных задачах, которые рассматриваются в книге, это будет следовать из самого вида получающейся передаточной функции.

Заметим также, что при выполнении (24) оператор (15) является периодическим. Поэтому все сказанное приводит к следующим эквивалентным определениям.

Передаточной функцией и весовой функцией линейной периодической системы (2) называются, соответственно, передаточная функция и весовая функция

определяемого этой системой физически реализуемого линейного периодического оператора (если такой существует). Этот оператор всегда существует, если решение уравнения (21), обладающее свойством (24), удовлетворяет как функция p условию (4.34).

Все сказанное открывает два практических пути нахождения весовой функции и передаточной функции линейной периодической системы (2). Первый путь состоит в нахождении весовой функции решением уравнения (9) при условии (14), после чего передаточная функция может быть определена с помощью преобразования Лапласа.

Второй путь заключается в нахождении периодического решения уравнения (21), что дает передаточную функцию, с последующим применением обратного преобразования Лапласа.

В настоящей книге рассматривается исключительно второй путь решения задачи, как более перспективный с вычислительной точки зрения. Поэтому в настоящем параграфе только укажем, что для системы вида (6) задача определения весовой функции сводится к решению однородного уравнения при соответствующих начальных условиях. Для того чтобы избежать громоздких общих выкладок, мы проиллюстрируем это на простых примерах. Однако такой же подход без изменений переносится на общий случай.

Пример 5.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0(t) \frac{Dy}{dt} + a_1(t) y = b_0(t) \frac{Dx}{dt} + b_1(t) x, \quad (5.25)$$

где функции $a_0(t)$, $b_0(t)$ непрерывно дифференцируемы и, кроме того, $a_0(t) \neq 0$. Полагая $x = \delta(t - \xi)$, получаем уравнение вида (9):

$$a_0(t) \frac{Dh(t, \xi)}{dt} + a_1(t) h(t, \xi) = b_0(t) \delta'(t - \xi) + b_1(t) \delta(t - \xi).$$

Учитывая, что по (I.3.3) и (I.3.4)

$$b_1(t) \delta(t - \xi) = b_1(\xi) \delta(t - \xi),$$

$$b_0(t) \delta'(t - \xi) = b_0(\xi) \delta'(t - \xi) - b_0'(\xi) \delta(t - \xi),$$

представляем предыдущее уравнение в виде

$$a_0(t) \frac{Dh(t, \xi)}{dt} + a_1(t) h(t, \xi) = \\ = b_0(\xi) \delta'(t - \xi) + [b_1(\xi) - b'_0(\xi)] \delta(t - \xi), \quad (5.26)$$

причем $h(t, \xi) = 0$ при $t < \xi$.

Вид правой части уравнения (26) подсказывает, что решение следует искать как сумму

$$h(t, \xi) = h_1(t, \xi) + k\delta(t - \xi), \quad (5.27)$$

где k — неизвестная постоянная, $h_1(t, \xi)$ — обыкновенная функция, равная нулю при $t < \xi$ и непрерывная при $t > \xi$.

Пусть

$$h_0 = h_1(\xi + 0, \xi)$$

— неизвестная величина. Тогда, дифференцируя (27) обобщенно, имеем, используя (I.2.20),

$$\frac{Dh(t, \xi)}{dt} = \frac{dh_1(t, \xi)}{dt} + h_0\delta(t - \xi) + k\delta'(t - \xi), \quad (5.28)$$

где $\frac{dh_1}{dt}$ — обыкновенная производная. Из (28) с помощью выкладок, аналогичных предыдущим, получаем, что

$$a_0(t) \frac{Dh(t, \xi)}{dt} + a_1(t) h(t, \xi) = a_0(t) \frac{dh_1(t, \xi)}{dt} + a_1(t) h_1(t, \xi) + \\ + ka_0(\xi) \delta'(t - \xi) + [a_0(\xi) h_0 + a_1(\xi) k - a'_0(\xi) k] \delta(t - \xi).$$

Сравнивая это выражение с правой частью уравнения (26), видим, что они тождественно равны, если

$$a_0(t) \frac{dh_1}{dt} + a_1(t) h_1 = 0 \quad (5.29)$$

и, кроме того,

$$ka_0(\xi) = b_0(\xi), \quad a_0(\xi) h_0 + a_1(\xi) k - a'_0(\xi) k = b_1(\xi) - b'_0(\xi),$$

откуда следует, что

$$k = \frac{b_0(\xi)}{a_0(\xi)}, \quad h_0 = \frac{b_1(\xi) - b'_0(\xi) + k[a'_0(\xi) - a_1(\xi)]}{a_0(\xi)}. \quad (5.30)$$

Второе выражение (30) дает начальное условие, при котором следует интегрировать уравнение (29). Найдя таким образом функцию $h_1(t, \xi)$ и используя найденное значение k , можно по (27), в принципе, получить искомого весовую функцию.

Пример 5.2. Рассмотрим уравнение с запаздыванием

$$\frac{Dy}{dt} + a(t) y(t - \tau) = x, \quad \tau > 0. \quad (5.31)$$

Уравнение для определения весовой функции имеет вид

$$\frac{Dh(t, \xi)}{dt} + a(t) h(t - \tau, \xi) = \delta(t - \xi). \quad (5.32)$$

Решение будем искать в виде обыкновенной функции, равной нулю при $t < \xi$ и непрерывной при $t > \xi$. Если, как и ранее, $h_0(\xi) = h(\xi + 0, \xi)$, то

$$\begin{aligned} \frac{Dh(t, \xi)}{dt} + a(t) h(t - \tau, \xi) = \\ = \frac{dh(t, \xi)}{dt} + a(t) h(t - \tau, \xi) + h_0 \delta(t - \xi), \end{aligned}$$

и, следовательно, правая часть этого уравнения равна правой части (32) при

$$\frac{dh(t, \xi)}{dt} + a(t) h(t - \tau, \xi) = 0, \quad t \geq \xi, \quad (5.33)$$

причем относительно функции h известно, что

$$h = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \xi, \\ 1 & \text{при } t = \xi. \end{cases} \quad (5.34)$$

Как известно из теории уравнений с запаздыванием [7], начальных условий (34) достаточно для вычисления $h(t, \xi)$ из уравнения (33).

§ 6. Импульсно-частотные характеристики линейных периодических операторов и систем. Передаточные функции и ИЧХ сложных систем

Рассмотрим воздействие входного периодического сигнала на линейный периодический оператор

$$y = U(x) = \sum_k a_k(t) (h_k * x), \quad a_k(t) = a_k(t - T). \quad (6.1)$$

Пусть

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ki\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.2)$$

— обобщенная периодическая функция. Предположим, что передаточная функция оператора (1) $W(p, t)$ не имеет полюсов при $p = ki\omega$ ($k = 0, \pm 1, \dots$), что соответствует нерезонансному случаю. Тогда, в соответствии с (4.15),

$$U(e^{i\omega t}) = e^{i\omega t} W(i\omega, t).$$

Подставляя ряд (2) в правую часть (1), имеем

$$y = U\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ki\omega t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega, t) x_k e^{ki\omega t}. \quad (6.3)$$

Введем в рассмотрение периодическую функцию

$$\varphi(T, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega, t) e^{ki\omega \tau}, \quad (6.4)$$

которую будем называть *импульсно-частотной характеристикой* (ИЧХ) оператора (1).

По структуре ряд (4) совпадает с ИЧХ стационарного оператора, если только величину t считать параметром. С учетом (4) и (I.7.44) выражение для y можно написать в виде

$$y = \varphi(T, t, \tau) * x(\tau), \quad (6.5)$$

где свертывание проводится по переменной τ , а t считается параметром, причем операция свертки понимается в смысле свертки периодических функций (§ 7 гл. I).

Если представить свертку периодических функций в виде интеграла (I.7.41), то формула (5) запишется (при $a = 0$) так:

$$y = \int_0^T \varphi(T, t, t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_0^T \varphi(T, t, \tau) x(t-\tau) d\tau, \quad (6.6)$$

где

$$\varphi(T, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)}. \quad (6.7)$$

В задачах, связанных с изучением симметричных вынужденных колебаний, часто оказывается полезным один специальный случай формулы (6). Пусть входной сигнал оператора (1) имеет период $T_1 = 2T$ и симметричен, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(t + T_1), \quad x(t) = -x\left(t + \frac{T_1}{2}\right), \\ x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{2k+1} e^{(2k+1)i\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{T} = \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Тогда, аналогично (3), получим

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega_1, t] x_{2k+1} e^{(2k+1)i\omega_1 t}. \quad (6.9)$$

С учетом (3.11) последнее равенство может быть переписано в виде

$$y = \int_0^T \psi(2T, t, t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (6.10)$$

где

$$\psi(2T, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega_1, t] e^{(2k+1)i\omega_1 \tau}. \quad (6.11)$$

Из (11) и факта периодичности передаточной функции следует непосредственно, что

$$\psi(2T, t - T, \tau - T) = -\psi(2T, t, \tau);$$

поэтому и функция y , определяемая соотношением (10), является симметричной, т. е. $y(t) = -y(t - T)$. Функция $\psi(2T, t, \tau)$ является аналогом функции $\psi(T, t)$ (3.13), введенной при рассмотрении стационарных систем, и переходит в нее, если оператор (1) стационарный, при замене $2T$ на T и τ на t .

Приведенные соображения позволяют получить также решение более общей задачи, когда

$$x = e^{\lambda t} z, \quad z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{k i \omega t}, \quad z(t) = z(t - T). \quad (6.12)$$

При этом, используя (1.29), находим, что $y = e^{\lambda t} u$, причем

$$u = W(p + \lambda, t) z. \quad (6.13)$$

Учитывая, что z — периодическая функция, и применяя формулу (6), сразу получим

$$u = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, \tau) z(t - \tau) d\tau, \quad (6.14)$$

где

$$\varphi(T, \lambda, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + k i \omega, t) e^{k i \omega \tau}. \quad (6.15)$$

Ряд (15) назовем, по аналогии со стационарным случаем, *смещенной импульсно-частотной характеристикой* (СИЧХ) оператора (1). Если в (14) произвести почленное интегрирование, то получим формулу, оказывающуюся полезной в приложениях:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + k i \omega, t) z_k e^{k i \omega t}. \quad (6.16)$$

Умножая равенства (14) на $e^{\lambda t}$, найдем выходной сигнал $y(t)$, соответствующий входному сигналу (12):

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda t} \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) z(\tau) d\tau = \\ &= e^{\lambda t} \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, \tau) z(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Установим связь между импульсно-частотными характеристиками и весовой функцией оператора (1). Для этого заметим, что если

$$x = \delta_T(t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k i \omega (t - \tau)},$$

то из (3) немедленно следует, что

$$y = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)} = \varphi(T, t, t-\tau),$$

т. е. функция $\varphi(T, t, t-\tau)$ есть реакция оператора (2) на сдвинутую периодическую последовательность δ -функций.

Совершенно аналогично показывается, что СИЧХ (15) связана с реакцией оператора (1) на входное воздействие вида

$$\bar{x} = e^{\lambda t} \delta_T(t - \tau) \quad (6.18)$$

соотношением

$$\varphi(T, \lambda, t, t - \tau) = e^{-\lambda t} U(\bar{x}). \quad (6.19)$$

Это обстоятельство позволяет найти связь ИЧХ и СИЧХ с весовой функцией системы. Действительно, используя представление

$$x = \delta_T(t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - kT),$$

из (1) получим, с учетом (1.6),

$$\varphi(T, t, t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t, \tau + kT), \quad (6.20)$$

где $h(t, \tau)$ — весовая функция оператора (1).

Точно так же, с учетом (19), находим, что

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) &= e^{-\lambda t} \sum_s a_s(t) [h_s * e^{\lambda t} \delta_T(t - \tau)] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t-\tau-kT)} h(t, \tau + kT). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Формулы (20) и (21) совершенно аналогичны соотношениям (3.25) и (3.27), полученным для стационарных систем.

Для физически реализуемого оператора легко также получить из (21) формулу, аналогичную (3.28):

$$\varphi(T, \lambda, t, \tau) = e^{-\lambda \tau} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kT} g(t, \tau + kT), \quad 0 < \tau < T, \quad (6.22)$$

где функция $g(t, \tau)$ определяется соотношением (4.25). Обратно, зная СИЧХ, можно по формуле

$$W(\lambda, t) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) d\tau = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, \tau) d\tau \quad (6.23)$$

найти передаточную функцию. Доказательство формулы (23) можно получить непосредственно из (15), интегрируя по τ .

Отметим также, что все изложенное непосредственно можно применять и в том случае, когда вместо оператора (1) задана система (5.2). В этом случае под ИЧХ (соответственно СИЧХ) системы мы будем понимать ИЧХ (соответственно СИЧХ) определяемого этой системой линейного периодического оператора.

Вообще, в дальнейшем мы будем отождествлять линейную периодическую систему с определяемым ею линейным периодическим оператором. При такой трактовке понятия системы и оператора становятся адекватными. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться в основном термином «система», как более употребительным.

Перейдем теперь к вопросу о построении передаточных функций сложных систем по передаточным функциям составляющих их элементов.

В случае параллельного соединения операторов

$$y = \sum_i z_i, \quad z_i = W_i(p, t)x, \quad W_i(p, t) = W_i(p, t - T) \quad (6.24)$$

имеем, очевидно,

$$W_c(p, t) = \sum_i W_i(p, t), \quad (6.25)$$

где $W_c(p, t)$ — передаточная функция соединения, $W_i(p, t)$ — передаточные функции элементов, имеющие, по предположению, одинаковый период. Эта формула аналогична формуле (1.41), полученной для стационарного случая. Следует подчеркнуть, что поскольку стационарная система, в силу (1.9), может считаться периодической с любым периодом, то среди слагаемых в правой части (25) могут быть и не зависящие от t .

Формула (25) имеет смысл и тогда, когда функции $W_i(p, t)$ имеют по t различные, но соизмеримые периоды T . В этом случае можно считать, что они имеют общий период, равный наименьшему общему кратному периодов T_i .

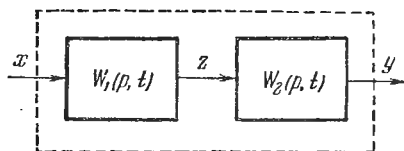


Рис. 3.

Пусть теперь имеется последовательное соединение (рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p, t) z, \quad z = W_1(p, t) x, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t + T) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Полагая $x = e^{\lambda t}$, по (1.8) имеем

$$z = e^{\lambda t} W_1(\lambda, t), \quad (6.27)$$

т. е. на второй элемент цепочки действует входной сигнал вида (12). Поэтому, применяя соотношение (17), имеем

$$y = e^{\lambda t} \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - \tau) W_1(\lambda, \tau) d\tau, \quad (6.28)$$

откуда следует, что передаточная функция цепочки

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - \tau) W_1(\lambda, \tau) d\tau. \quad (6.29)$$

В формуле (29) φ_2 — СИЧХ элемента с передаточной функцией $W_2(p, t)$.

Если

$$\left. \begin{aligned} W_1(p, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k i \omega t} W_{1k}(p), \\ W_{1k}(p) &= \frac{1}{T} \int_0^T W_1(p, \tau) e^{-k i \omega \tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

— каноническое представление передаточной функции $W_1(p, t)$, то, используя (16), получим также

$$W_c(\lambda, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(\lambda + ki\omega, t) W_{1k}(\lambda) e^{ki\omega t}. \quad (6.31)$$

Формулой (31) удобно пользоваться в тех случаях, когда функция $W_1(p, t)$ является конечной тригонометрической суммой по t .

Заметим, что если первый элемент цепочки (26) стационарен, т. е.

$$W_1(p, t) = W_1(p), \quad (6.32)$$

то из (29) и (23) сразу следует

$$W_c(\lambda, t) = W_2(\lambda, t) W_1(\lambda), \quad (6.33)$$

что вполне аналогично случаю стационарных операторов. Если же стационарным является второй элемент, то формула (3.3) уже неверна. Однако и в этом случае формулы (29) и (31) упрощаются. Действительно, если

$$W_2(p, t) = W_2(p), \quad (6.34)$$

то из (29) имеем

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t - \tau) W_1(\lambda, \tau) d\tau, \quad (6.35)$$

а из (31) получается

$$W_c(\lambda, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(\lambda + ki\omega) W_{1k}(\lambda) e^{ki\omega t}. \quad (6.36)$$

Другой важный частный случай — когда последним элементом цепочки является безынерционный усилитель. Тогда в (26)

$$W_2(p, t) = a(t), \quad a(t) = a(t + T). \quad (6.37)$$

Легко убедиться, что в этом случае

$$W_c(\lambda, t) = a(t) W_1(\lambda, t). \quad (6.38)$$

Аналогичным путем могут быть построены передаточные функции в том случае, когда элементы

последовательного соединения (26) имеют различные, но соизмеримые периоды. Пусть, например,

$$\left. \begin{aligned} W_1(p, t) = W_1(p, t + T), \quad W_2(p, t) = W_2(p, t + T_1), \\ T_1 = nT; \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

где n — целое число, большее единицы. Передаточную функцию $W_1(p, t)$ можно считать имеющей период T_1 ; поэтому, используя формулу (29), найдем передаточную функцию соединения:

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^{T_1} \varphi_2(T_1, \lambda, t, t - \tau) W_1(\lambda, \tau) d\tau, \quad (6.40)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(T_1, \lambda, t, t - \tau) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(\lambda + ki\omega_1, t) e^{kt\omega_1(t-\tau)}, \\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\omega}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Приведем теперь формулу (41) к виду, аналогичному (31). Для этого перепишем каноническое представление передаточной функции $W_1(\lambda, t)$ (30) в виде

$$W_1(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{kt\omega_1 n t} W_{1k}(p), \quad (6.42)$$

откуда видно, что функция $W_1(p, t)$, рассматриваемая как периодическая с периодом T_1 , имеет лишь гармоники, кратные n . Поэтому, применяя формулу (31), находим

$$\begin{aligned} W_c(\lambda, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(\lambda + kin\omega_1) W_{1k}(\lambda) e^{kt\omega_1 n t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(\lambda + ki\omega, t) W_{1k}(\lambda) e^{kt\omega t}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

что совпадает по форме с (31); однако в силу второго условия (39) передаточная функция (43) имеет период nT .

Таким же путем можно построить СИЧХ для параллельного и последовательного соединений элементов.

Так, полагая входной сигнал равным (18), для параллельного соединения (24) получим

$$\varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) = \sum_i \varphi_i(T, \lambda, t, t - \tau). \quad (6.44)$$

Для последовательного соединения (26) при входном сигнале (18) имеем, в силу (19),

$$z = e^{\lambda t} \varphi_1(T, \lambda, t, t - \tau), \quad (6.45)$$

где φ_1 — СИЧХ первого элемента. На второй элемент цепи действует при фиксированном τ возбуждение вида (12). Поэтому имеем

$$y = e^{\lambda t} \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - q) \varphi_1(T, \lambda, q, q - \tau) dq, \quad (6.46)$$

где φ_2 — СИЧХ второго элемента. Следовательно, СИЧХ соединения равна

$$\begin{aligned} \varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - q) \varphi_1(T, \lambda, q, q - \tau) dq. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Покажем теперь, что

$$\varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_c(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)}, \quad (6.48)$$

где $W_c(\lambda, t)$ — передаточная функция соединения, определяемая формулой (29). Для этого предварительно докажем одно вспомогательное соотношение, имеющее также и самостоятельное значение. Заменяя в (15) λ на $\lambda + si\omega$, где s — произвольное целое число, имеем

$$\varphi(T, \lambda + si\omega, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + (s+k)i\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)}.$$

Заменяя здесь индекс суммирования k на $s+k$, получим

$$\varphi(T, \lambda + si\omega, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) e^{(k-s)i\omega(t-\tau)}.$$

Умножая обе части этого равенства на $e^{si\omega(t-\tau)}$ и замечая, что в правой части получится просто функция φ , приходим к соотношению

$$\varphi(T, \lambda + si\omega, t, t - \tau) = e^{-si\omega(t-\tau)} \varphi(T, \lambda, t, t - \tau), \quad (6.49)$$

справедливому для любого ряда вида (15).

Используя (49), легко доказать справедливость формулы (48). Действительно, заменяя в (29) λ на $\lambda + si\omega$ и используя (49), получим

$$\begin{aligned} W_c(\lambda + si\omega, t) &= \\ &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - q) e^{-si\omega(t-q)} W_1(\lambda + si\omega, q) dq. \end{aligned}$$

Умножая эти выражения при различных s на $\frac{1}{T} e^{si\omega(t-q)}$ и суммируя по s , найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} W_c(\lambda + si\omega, t) e^{si\omega(t-\tau)} &= \\ &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - q) \left[\frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} W_1(\lambda + si\omega, q) e^{si\omega(q-\tau)} \right] dq = \\ &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - q) \varphi_1(T, \lambda, q, q - \tau) dq. \end{aligned}$$

В том частном случае, когда первым элементом последовательной цепи является безынерционный усилитель, можно получить более простую формулу. Пусть в (26)

$$W_1(p, t) = a(t);$$

тогда

$$\varphi_1(T, p, q, q - \tau) = a(q) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k i \omega (q - \tau)} = a(q) \delta_T(q - \tau),$$

и из (47) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_c(T, p, t, t - q) &= \int_0^T \varphi_2(T, p, t, t - q) a(q) \delta_T(q - \tau) dq = \\ &= \varphi_2(T, p, t, t - \tau) a(\tau). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Приведенные соотношения позволяют строить передаточные функции и СИЧХ последовательных соединений, содержащих более двух периодических элементов. Пусть, например,

$$\left. \begin{aligned} y &= W_3(p, t) u, \quad u = W_2(p, t) z, \quad z = W_1(p, t) x, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t - T), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Тогда, вычислив передаточную функцию W_{ux} соединения

$$u = W_2(p, t) z, \quad z = W_1(p, t) x, \quad (6.52)$$

от (51) перейдем к системе

$$y = W_3(p, t) u, \quad u = W_{ux}(p, t) x, \quad (6.53)$$

передаточную функцию которой можно найти по формулам, приведенным выше. Можно поступить и иначе: сначала найти передаточную функцию W_{yz} системы

$$y = W_3(p, t) u, \quad u = W_2(p, t) z, \quad (6.54)$$

а затем найти передаточную функцию системы

$$y = W_{yz}(p, t) z, \quad z = W_1(p, t) x. \quad (6.55)$$

При этом возникает естественный вопрос о том, приведут ли такие способы вычисления передаточной функции к одному и тому же результату. То есть фактически возникает проблема доказательства ассоциативности операции вычисления передаточной функции. На подробностях этого вопроса мы не будем останавливаться. Отметим только, без доказательства, что если все элементы цепи фактически реализуемы, то ассоциативность имеет место и передаточные функции элементов последовательной цепи можно комбинировать произвольным образом. В дальнейшем мы будем иметь дело только с физически реализуемыми системами и элементами. Поэтому применение изложенного способа построения передаточных функций последовательных соединений будет законным. Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 6.1. Рассмотрим простейшую систему с модуляцией:

$$y = W(p) z, \quad z = f(t) x, \quad f(t) = f(t + T). \quad (6.56)$$

Передаточная функция такой системы, по (29), равна

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) f(\tau) d\tau = \\ = \int_0^T \varphi(T, \lambda, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (6.57)$$

где

$$\varphi(T, \lambda, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}.$$

Если же воспользоваться формулой (31), то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} W_c(\lambda, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) f_k e^{ki\omega t}, \\ f_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-ki\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

Соотношение (58) существенно упрощается, если модулируемая функция $f(t)$ имеет конечное число гармоник, так как при этом в (58) вместо ряда получаем конечную сумму. Пусть, в частности,

$$f(t) = \sin \omega t; \quad (6.59)$$

тогда из (58) сразу вытекает, что

$$W_c(\lambda, t) = \frac{1}{2i} W(\lambda + i\omega) e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} W(\lambda - i\omega) e^{-i\omega t}. \quad (6.60)$$

Если же известно простое аналитическое выражение $f(t)$ и известно замкнутое выражение для СИЧХ φ , то удобнее бывает пользоваться формулами (57).

Пусть

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T, \end{cases} \quad (6.61)$$

т. е. уравнение $z = f(t)x$ определяет амплитудно-импульсный элемент второго рода (ключ) [103]. Тогда из (57) получаем

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^{t_1} \varphi(T, \lambda, t - \tau) d\tau. \quad (6.62)$$

Предположим дополнительно, что $W(p)$ имеет вид (3.53); тогда по (3.70)

$$\varphi(T, \lambda, t - \tau) =$$

$$= \begin{cases} \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau) = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)(t-\tau)}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}, & 0 < t - \tau < T, \\ \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau + T) = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)(t-\tau+T)}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}, & -T < t - \tau < 0. \end{cases}$$

Подставляя эти соотношения в (6.2), получим, что

$$W_c(\lambda, t) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^t \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau) d\tau + \int_t^{t_1} \tilde{\varphi}(t, \lambda, t - \tau + T) d\tau, & 0 < t < t_1, \\ \int_0^{t_1} \tilde{\varphi}(T, \lambda, t - \tau) d\tau, & t_1 < t < T. \end{cases} \quad (6.63)$$

После интегрирования из (6.3) получим замкнутую форму передаточной функции:

$$W_c(\lambda, t) =$$

$$= \begin{cases} W(\lambda) + \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p_{\rho} - \lambda} \frac{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)(T-t_1)}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} e^{(p_{\rho}-\lambda)t}, & 0 < t < t_1, \\ \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p_{\rho} - \lambda} \frac{1 - e^{(\lambda-p_{\rho})t_1}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} e^{(p_{\rho}-\lambda)t}, & t_1 < t < T. \end{cases} \quad (6.64)$$

Пример 6.2. Рассмотрим более сложный пример. Пусть уравнения последовательной цепи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) u, & u &= f(t) v, \\ v &= W_1(p) z, & z &= \sin \omega t \cdot x, & \omega &= \frac{2\pi}{T}, \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

где функция $f(t)$ дается соотношениями (61). Здесь мы имеем последовательное соединение систем с

передаточными функциями (60) и (63). Поэтому можно написать

$$y = W_{yv}(p, t) v, \quad v = W_{vx}(p, t) x, \quad (6.66)$$

где

$$W_{yv}(p, t) = \int_0^{t_1} \varphi_2(T, p, t - \tau) d\tau, \quad (6.67)$$

$$W_{vx}(p, t) = \frac{1}{2i} W_1(p + i\omega) e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} W_1(p - i\omega) e^{-i\omega t}, \quad (6.68)$$

причем $\varphi_2(T, p, t - \tau)$ — СИЧХ для $W_2(p)$. Формула (68) дает каноническое представление передаточной функции $W_{vx}(p, t)$, причем, в соответствии с (30),

$$\left. \begin{aligned} W_{1,1}(p) &= \frac{1}{2i} W_1(p + i\omega), \\ W_{1,-1}(p) &= -\frac{1}{2i} W_1(p - i\omega), \\ W_{1k}(p) &= 0 \quad (k \neq 1, -1). \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

Применяя к системе (66) формулу (31), найдем с учетом (69) передаточную функцию системы (66):

$$W_c(p, t) = \frac{1}{2i} W_1(p + i\omega) W_{yv}(p + i\omega, t) e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} W_1(p - i\omega) W_{yv}(p - i\omega, t) e^{-i\omega t}, \quad (6.70)$$

или с учетом (67)

$$W_c(p, t) = \frac{1}{2i} W_1(p + i\omega) e^{i\omega t} \int_0^{t_1} \varphi_2(T, p + i\omega, t - \tau) d\tau - \frac{1}{2i} W_1(p - i\omega) e^{-i\omega t} \int_0^{t_1} \varphi_2(T, p - i\omega, t - \tau) d\tau. \quad (6.71)$$

В частности, если $W_2(p)$ имеет вид (3.53), то из (70) и (64) получается простое замкнутое выражение для передаточной функции $W_c(p, t)$.

Пример 6.3. Интересным примером линейного периодического оператора является звено с периодическим запаздыванием. Пусть имеем

$$y = U(x) = x[t - \tau_3(t)], \quad (6.72)$$

где

$$\tau_3(t) \geq 0, \quad \tau_3(t) = \tau_3(t - T). \quad (6.73)$$

Полагая $x = e^{pt}$, находим передаточную функцию оператора (73):

$$W_\tau(p, t) = e^{-pt} U(e^{pt}) = e^{-p\tau_3(t)}, \quad (6.74)$$

откуда, в силу (73), следует, что оператор (72) — периодический. Если имеем последовательную цепь вида

$$y = W(p, t)z, \quad z = W_\tau(p, t)x, \quad (6.75)$$

где W_τ дается формулой (74), а $W(p, t)$ — передаточная функция произвольного линейного периодического оператора периода T , то, по (29), передаточная функция системы (75) равна

$$W_c(p, t) = \int_0^T \varphi(T, p, t, t - q) e^{-p\tau_3(q)} dq. \quad (6.76)$$

Пример 6.4. Найдем СИЧХ последовательной цепи, описываемой уравнениями

$$y = W(p)u, \quad u = a(t)z, \quad z = px. \quad (6.77)$$

Передаточная функция от x к u равна, очевидно,

$$W_{ux}(p, t) = a(t)p. \quad (6.78)$$

Поэтому соответствующая СИЧХ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{ux}(T, p, t, t - \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{ux}(p + ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)} = \\ &= a(t) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (p + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

С учетом (I.7.29) последнее выражение может быть представлено в виде

$$\Phi_{ux}[T, p, t, t - \tau] = pa(t)\delta_T(t - \tau) + a(t)\delta'_T(t - \tau). \quad (6.80)$$

Если использовать формулы умножения (I.3.2), (I.3.4), то, предполагая функцию $a(t)$ дифференцируемой,

имеем также

$$\begin{aligned}\varphi_{ux}(T, p, t, t - \tau) &= \\ &= pa(\tau) \delta_T(t - \tau) - a'(\tau) \delta_T(t - \tau) + a(\tau) \delta'_T(t - \tau).\end{aligned}\quad (6.81)$$

Теперь воспользуемся формулой (47), которая позволяет найти СИЧХ системы (77):

$$\varphi_c(T, p, t, t - \tau) = \int_0^T \varphi(T, p, t - q) \varphi_{ux}(T, p, q, q - \tau) dq, \quad (6.82)$$

где $\varphi(T, p, t - q)$ — СИЧХ, соответствующая передаточной функции $W(p)$. Подставляя (81) в (82) и используя (I.7.45) и (I.7.46), получим искомую СИЧХ:

$$\begin{aligned}\varphi_c(T, p, t, t - \tau) &= \\ &= \varphi(T, p, t - \tau) [pa(\tau) - a'(\tau)] - \frac{D}{\partial \tau} \varphi(T, p, t - \tau) a(\tau),\end{aligned}\quad (6.83)$$

где $\frac{D}{\partial \tau}$ — оператор обобщенной частной производной. В данном случае

$$\varphi(T, p, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)} \quad (6.84)$$

является периодической по τ , и поэтому обобщенная производная может быть получена формальным дифференцированием по τ :

$$\frac{D\varphi(T, p, t - \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ki\omega) W(p + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}. \quad (6.85)$$

С учетом (85) выражение (83) может быть преобразовано к виду

$$\varphi_c(T, p, t, t - \tau) = \tilde{\varphi}(T, p, t - \tau) a(\tau) - \varphi(T, p, t - \tau) \frac{da}{d\tau}, \quad (6.86)$$

где $\tilde{\varphi}(T, p, t - \tau)$ — СИЧХ системы с передаточной функцией $\tilde{W}(p) = pW(p)$.

В дальнейшем с целью более удобного преобразования уравнений сложных систем иногда будут использованы более компактные обозначения. Именно, передаточную функцию последовательной цепи (29) будем записывать так:

$$W_c(p, t) = W_2(p, t) \circ W_1(p, t), \quad (6.87)$$

так что уравнения (26) могут быть представлены в виде

$$y = W_2(p, t) \circ W_1(p, t) x. \quad (6.88)$$

Очевидно, что в общем случае

$$W_1(p, t) \circ W_2(p, t) \neq W_2(p, t) \circ W_1(p, t).$$

В том числе, когда $W_1(p, t) = W_1(p)$, операция, обозначаемая символом « $\circ$ », превращается в обыкновенное умножение, в результате чего получается (33). Из сказанного ранее следует также, что

$$\begin{aligned} W_1(p, t) \circ [W_2(p, t) + W_3(p, t)] = \\ = W_1(p, t) \circ W_2(p, t) + W_1(p, t) \circ W_3(p, t). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Очевидно, что с помощью записи (87) можно представить передаточную функцию произвольной разомкнутой периодической системы.

§ 7. Передаточные функции и СИЧХ систем с обратной связью

Изложенные выше соображения позволяют строить передаточные функции последовательных и параллельных соединений линейных периодических элементов по передаточным функциям элементов. При этом знание передаточных функций элементов всегда позволяет получить явное выражение передаточной функции соединения, что, в частности, всегда имеет место для стационарных систем.

При определении передаточных функций линейных периодических систем, содержащих соединения с обратной связью, мы сталкиваемся уже с другой ситуацией. В отличие от стационарных систем, в данном случае уже не удастся найти в общем случае явного выражения для передаточной функции системы. Однако

для систем с обратной связью удастся получить интегральное уравнение, которому удовлетворяет передаточная функция. Как будет показано далее, в ряде важных случаев это уравнение удастся решить, что приводит к явному выражению передаточной функции.

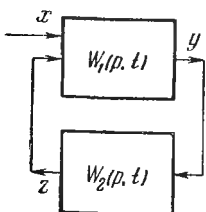


Рис. 4.

Рассмотрим простейшую замкнутую систему, изображенную на рис. 4. Уравнения этой системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y &= W_1(p, t)(x + z), & z &= W_2(p, t)y, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t + T), & i &= 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

причем входным сигналом считается x , а выходным — y . Полагая в (1)

$$x = e^{\lambda t} x_{\Pi}, \quad z = e^{\lambda t} z_{\Pi}, \quad y = e^{\lambda t} y_{\Pi} \quad (7.2)$$

и используя (4.36), получим уравнения

$$y_{\Pi} = W_1(p + \lambda, t)(x_{\Pi} + z_{\Pi}), \quad z = W_2(p + \lambda, t)y_{\Pi}. \quad (7.3)$$

Полагая, что функции x_{Π} , y_{Π} , z_{Π} — периодические по t с периодом T , из (3) имеем, используя (6.14),

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t, t - \tau) [x_{\Pi}(\tau) + z_{\Pi}(\tau)] d\tau \quad (7.4)$$

и, кроме того,

$$z_{\Pi}(t) = \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau. \quad (7.5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем

$$y_{\Pi} = \int_0^T k(\lambda, t, \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t, t - \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau, \quad (7.6)$$

где

$$k(\lambda, t, \tau) = \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t, t - q) \varphi_2(T, \lambda, q, q - \tau) dq, \quad (7.7)$$

а φ_1 и φ_2 — соответствующие СИЧХ.

Из (6.47) следует, что ядро интегрального уравнения (6) $k(\lambda, t, \tau)$ совпадает с СИЧХ последовательного соединения элементов 2 и 1 с передаточной функцией $W(p, t) = W_1(p, t) \circ W_2(p, t)$. Для того чтобы получить интегральное уравнение передаточной функции, следует, очевидно, в (6) положить $x_n(t) = 1$. Тогда, учитывая, что

$$\int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t, t - \tau) d\tau = W_1(\lambda, t),$$

из (6), заменяя λ на p , получаем искомое интегральное уравнение для передаточной функции замкнутой системы:

$$W_{yx}(p, t) = \int_0^T k(p, t, \tau) W_{yx}(p, \tau) d\tau + W_1(p, t). \quad (7.8)$$

Уравнение (6) определяет общий вид вынужденных колебаний системы (1), имеющих форму (2). В частности, если положить в (6) $\lambda = 0$, то получим интегральное уравнение вынужденных периодических колебаний системы (1). Из (6) при $\lambda = 0$ имеем

$$y(t) = \int_0^T k(t, \tau) y(\tau) d\tau + \int_0^T \varphi_1(T, t, t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (7.9)$$

где

$$k(t, \tau) = \int_0^T \varphi_1(T, t, t - q) \varphi_2(T, q, q - \tau) dq. \quad (7.10)$$

При этом следует иметь в виду, что в общем случае (6), (9) фактически представляют собой уравнения в обобщенных функциях типа свертки с переменными (периодическими) коэффициентами. Если же k, φ, x, y сводятся к обыкновенным функциям, то (9) превращается в интегральное уравнение в классическом смысле. Можно также в уравнениях (1) считать выходом величину z . Для того чтобы найти уравнение,

определяющее $z_n(t)$, подставим (4) в (5). Тогда сразу получится

$$z_{\Pi}(t) = \int_0^T k_1(\lambda, t, \tau) z_n(\tau) d\tau + \int_0^T k_1(\lambda, t, \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau, \quad (7.11)$$

где

$$k_1(\lambda, t, \tau) = \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t, t-q) \varphi_1(T, \lambda, q, q-\tau) dq \quad (7.12)$$

— СИЧХ последовательного соединения элементов, имеющего передаточную функцию

$$W(p, t) = W_2(p, t) \circ W_1(p, t). \quad (7.13)$$

Если $x_{\Pi} = 1$, то из (11) получаем интегральное уравнение передаточной функции от x к z :

$$W_{zx}(p, t) = \int_0^T k_1(p, t, \tau) W_{zx}(p, \tau) d\tau + W(p, t), \quad (7.14)$$

где $W(p, t)$ — передаточная функция разомкнутой цепи (13).

Отметим теперь, что, зная передаточную функцию замкнутой системы от некоторого входа к некоторому

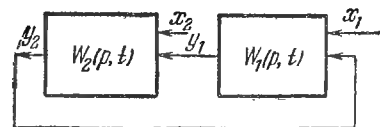


Рис. 5.

выходу, нетрудно получить передаточные функции системы от любого входа к любому выходу. Пусть, например, имеем замкнутую систему, изображенную на рис. 5. Вы-

ходом $y_1(t)$ будем считать выход первого звена с передаточной функцией $W_1(p, t)$. Передаточные функции системы по отношению к возмущениям, приложенным, соответственно, к первому и второму звеньям, обозначим через W_{11} и W_{12} .

Предположим, что передаточная функция $W_{11}(p, t)$ от x_1 к y_1 известна и, соответственно, построена СИЧХ φ_{11} . Теперь, если предположить, что ко входу второго звена приложено возмущение $x_2(t)$, то это эквивалентно возмущению $W_2(p, t)x_2(t)$, приложенному ко входу

первого звена. Поэтому, используя (6.29), можно сразу написать

$$W_{12}(p, t) = \int_0^T \varphi_{11}(T, p, t, t - \tau) W_2(p, \tau) d\tau. \quad (7.15)$$

Поскольку выбор первого и второго звеньев является условным, то справедливо также и взаимное соотношение

$$W_{21}(p, t) = \int_0^T \varphi_{22}(T, p, t, t - \tau) W_1(p, \tau) d\tau, \quad (7.16)$$

где φ_{22} — СИЧХ, соответствующая передаточной функции от входа x_2 к выходу y_2 . Кроме того, зная передаточную функцию $W_{11}(p, t)$, можно построить передаточную функцию W_{21} от входа x_1 к выходу y_2 , пользуясь соотношением

$$W_{21}(p, t) = \int_0^T \varphi_2(T, p, t, t - \tau) W_{11}(p, \tau) d\tau, \quad (7.17)$$

и т. д.

Перейдем теперь к построению интегрального уравнения, определяющего СИЧХ системы (1), используя (6.15). Для этого заменяем в (8) p на $p + si\omega$. Тогда, умножая получившийся результат на $\frac{1}{T} e^{si\omega(t-\tau)}$ и суммируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} W_c(p + si\omega, t) e^{si\omega(t-\tau)} = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{s=-\infty}^{\infty} k(p + si\omega, t, q) W_c(p + si\omega, q) e^{si\omega(t-\tau)} dq + \\ + \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} W_1(p + si\omega, t) e^{si\omega(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что сумма в левой части этого равенства равна $\varphi_c(T, p, t, t - \tau)$, а сумма в правой части

$\varphi_1(T, p, t, t - \tau)$. Преобразуем теперь подынтегральное выражение. Из (7) и (6.49) имеем

$$k(p + si\omega, t, q) =$$

$$= \int_0^T \varphi_1(T, p + si\omega, t, t - r) \varphi_2(T, p + si\omega, r, r - q) dr =$$

$$= k(p, t, q) e^{-si\omega(t-q)}.$$

Поэтому

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} k(p + si\omega, t, q) W_c(p + si\omega, q) e^{si\omega(t-\tau)} =$$

$$= k(p, t, q) \sum_{s=-\infty}^{\infty} W_c(p + si\omega, q) e^{si\omega(q-\tau)}$$

и из (17) получаем

$$\varphi_c(T, p, t, t - \tau) =$$

$$= \int_0^T k(p, t, q) \varphi_c(T, p, q, q - \tau) dq + \varphi_1(T, p, t, t - \tau). \quad (7.18)$$

Соотношение (18) представляет собой искомое интегральное уравнение для СИЧХ системы (1).

Перейдем теперь к задаче определения передаточной функции системы, заданной уравнением вида (5.5). Покажем, что эта задача всегда может быть сведена к определению передаточной функции некоторой системы с обратной связью. Действительно, пусть сначала имеем уравнение

$$\sum_k a_k(t) (h_k * y) = x \quad (7.19)$$

или, что эквивалентно,

$$a(p, t) y = x, \quad (7.20)$$

где $a(p, t)$ — соответствующая передаточная функция.

Разобьем передаточную функцию $a(p, t)$ некоторым образом на два слагаемых:

$$a(p, t) = \alpha_1(p, t) - \alpha_2(p, t), \quad (7.21)$$

так, чтобы передаточная функция системы с уравнением

$$\alpha_1(p, t) \tilde{y} = \tilde{x} \quad (7.22)$$

была известна и равнялась $W_1(p, t)$. Тогда уравнение (22) будет эквивалентно следующему:

$$\tilde{y} = W_1(p, t) \tilde{x}. \quad (7.23)$$

В частности, если выбрать функцию $\alpha_1(p, t)$ не зависящей от t , т. е. $\alpha_1(p, t) = \alpha(p)$, то

$$\tilde{y} = \frac{1}{\alpha(p)} \tilde{x}. \quad (7.24)$$

С учетом (21) исходное уравнение (20) примет вид

$$\alpha_1(p, t) y = \alpha_2(p, t) y + x. \quad (7.25)$$

Обозначая

$$\alpha_2(p, t) y = z, \quad (7.26)$$

из (25) и (23) придем сразу к уравнениям вида (1), где $W_1(p, t)$ определяется соотношением (23) и $W_2(p, t) = \alpha_2(p, t)$. Поэтому интегральное уравнение, определяющее передаточную функцию системы (19), будет иметь вид (8).

Если теперь имеем вместо (20) общее уравнение вида

$$a(p, t) y = b(p, t) u, \quad (7.27)$$

то его можно рассматривать как последовательное соединение элемента с передаточной функцией $b(p, t)$ и элемента с передаточной функцией соответствующей уравнению (19). Поэтому, используя (6.29), найдем передаточную функцию системы (27):

$$W_{yu}(p, t) = \int_0^T \varphi_{yx}(T, p, t, t - \tau) b(p, \tau) d\tau, \quad (7.28)$$

где φ_{yx} — СИЧХ системы (20). Если, в частности, $b(p, t)$ не зависит от t , то по (6.33)

$$W_{yu}(p, t) = W_{yx}(p, t) b(p), \quad (7.29)$$

где $W_{yx}(p, t)$ — передаточная функция системы (20).

Следует отметить, что в разбиении (21) имеется большой произвол. Поэтому исходному уравнению (20) можно сопоставить целое множество уравнений вида (1) и, соответственно, множество интегральных уравнений

вида (8). В принципе все эти уравнения эквивалентны и должны приводить к одному и тому же результату. Однако с точки зрения получения удобного приближенного решения эти уравнения, вообще говоря, неравноценны [75].

Пример 7.1. Рассмотрим уравнение

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + a(t) p y + b(t) y &= x, \\ a(t) &= a(t+T), \quad b(t) = b(t+T). \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} W_1(p, t) &= W_1(p) = \frac{1}{p^2}, \\ W_2(p, t) &= -a(t)p - b(t), \quad W_2(p, t) y = z, \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

из (30) получим уравнения замкнутой системы

$$y = W_1(p)(x + z), \quad z = W_2(p, t)y.$$

В данном случае передаточная функция $\bar{W}(p, t)$ последовательного соединения из элементов W_1 и W_2 имеет вид

$$\bar{W}(p, t) = - \int_0^T \varphi_1(T, p, t - \tau) [a(\tau)p + b(\tau)] d\tau. \quad (7.32)$$

Поэтому интегральное уравнение передаточной функции (8) для системы (30) может быть представлено в виде

$$W_c(p, t) = \int_0^T k_1(p, t, \tau) W_c(p, \tau) d\tau + \frac{1}{p^2}, \quad (7.33)$$

где

$$k_1(p, t, \tau) = \int_0^T \varphi_1(T, p, t, t - q) \varphi_2(T, p, q, q - \tau) dq. \quad (7.34)$$

Если же вместо (31) положить

$$\begin{aligned} W_1(p, t) &= W_1(p) = \frac{1}{p^2 + a_0 p + b_0}, \\ W_2(p, t) &= [a_0 - a(t)]p + b_0 - b(t), \\ a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T a(\tau) d\tau, \quad b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

то интегральное уравнение передаточной функции примет вид

$$W_c(p, t) = \int_0^T k_2(p, t, \tau) W_c(p, \tau) d\tau + \frac{1}{p^2 + a_0 p + b_0},$$

где $k_2(p, t, \tau)$ определяется аналогично (34).

§ 8. Переходные и установившиеся процессы в линейных периодических системах

Знание передаточной функции линейной периодической системы позволяет определить ее реакцию на произвольное внешнее воздействие. Действительно, пусть задана передаточная функция системы $W_c(p, t)$, причем

$$W_c(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(p) e^{ki\omega t} \quad (8.1)$$

— ее каноническое представление, и, как уже указывалось, предполагается, что $W_c(p, t)$ при каждом фиксированном p , не являющемся полюсом $W_h(p)$, ограничена при всех t . Если h_k — обобщенные функции, для которых преобразованиями Лапласа являются функции $W_h(p)$, то, по доказанному ранее, выходной сигнал системы $y(t)$ связан с входным $x(t)$ соотношением

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega t} (h_k * x) = W_c(p, t) x. \quad (8.2)$$

Предположим, что входной сигнал имеет преобразование Лапласа $X(p)$. Тогда по (I.6.10) изображением свертки $h_k * x$ является функция $W_h(p)X(p)$, и, следовательно, используя формулу обращения (I.6.11), имеем

$$h_k * x = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_k(p) X(p) e^{pt} dp. \quad (8.3)$$

При этом предполагается, что величину C в пределах интегрирования можно выбрать не зависящей от k . Подставляя (3) в (2) и меняя порядок интегрирования и

суммирования, получим

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k\omega t} \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_k(p) X(p) e^{pt} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(p) e^{k\omega t} \right] X(p) e^{pt} dp,$$

т. е.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_c(p, t) X(p) e^{pt} dp. \quad (8.4)$$

Из (4) вытекает одно важное свойство линейных периодических систем.

Рассмотрим наряду с системой (2) стационарную систему

$$y_1 = W_c(p, t_0) x \quad (8.5)$$

с передаточной функцией $W_c(p, t_0)$, «замороженной» в момент t_0 . В соответствии с (4) переходный процесс в такой системе при входном воздействии $x(t)$ выразится интегралом

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t_0) X(p) e^{pt} dp. \quad (8.6)$$

Сравнивая выражения (4) и (6), видим, что

$$y_1(t_0 + kT) = y(t_0 + kT) \quad (k=0, 1, \dots), \quad (8.7)$$

т. е. переходные процессы в системах (2) и (5) при одинаковом входном воздействии в моменты $t = t_0 + kT$ совпадают.

Из (4) следует, что при фиксированном t выходной сигнал вычисляется, как обратное преобразование Лапласа от произведения $W_c(p, t) X(p)$.

Если, в частности, входной сигнал представляет собой δ -функцию, то $X(p) = 1$, и из (4) приходим к полученным ранее выражениям для функции $g(t, \xi)$ (4.23) и (4.32):

$$g(t, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(\xi) e^{k\omega t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p\xi} dp. \quad (8.8)$$

Заменяя здесь ξ на $t - \xi$, получаем выражение для весовой функции:

$$h(t, \xi) = g(t, t - \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p(t-\xi)} dp. \quad (8.9)$$

Пусть весовая функция (9) обладает свойством физической реализуемости, для чего достаточно, чтобы этим свойством обладали функции h_k . Если входной сигнал действует на систему при $t \geq 0$, то выражение (4) дает решение исходного операторного уравнения, которое обращается в нуль при $t < 0$.

Фактическое вычисление выходного сигнала по формуле (4) сводится к применению теории обратного преобразования Лапласа (см. § 6 гл. I) и ничем не отличается от случая стационарных систем, так как аргумент t передаточной функции играет роль свободного параметра и в вычислениях не участвует.

В том основном случае, когда произведение $W(p, t)X(p)$ является, как функция p , изображением обыкновенной интегрируемой функции, большинство практических задач охватывается классической теоремой [27], которая применительно к нашему случаю формулируется следующим образом.

Пусть произведение $W(p, t)X(p) = F(p, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $F(p, t)$, как функция p , мероморфна и регулярна при каждом $t = t_0$, $0 \leq t_0 \leq T$, в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > C$.
2. Полосы функции $F(p, t)$ не зависят от t .
3. Существует система вложенных друг в друга окружностей D_k :

$$|p| = R_k, \quad R_1 < R_2 < \dots < R_n \rightarrow \infty,$$

на которой $F(p, t)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$.

4. Для любого $a > C$ и любого t_0 , $0 \leq t_0 < T$, абсолютно сходится интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} W(p, t_0) dp.$$

Тогда

$$y(t) = \sum_{p_k} \text{Res}_{p_k} [F(p, t) e^{pt}], \quad (8.10)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам p_k функции $F(p, t)$ в порядке неубывания их модулей.

Замечание. Если иметь в виду способ вычисления обратного преобразования Лапласа от обобщенных функций, изложенный в § 6 гл. I, то с помощью сформулированной теоремы можно вычислять оригинал от произведения $F(p, t)$ и в более общих случаях. Действительно, предположим, что функция $F(p, t)$ такова, что существует целое число $s > 0$ такое, что функция

$$F_1(p, t) = \frac{F(p, t)}{p^s} \quad (8.11)$$

удовлетворяет всем условиям сформулированной теоремы. Тогда, если

$$g_1(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p, t)}{p^s} e^{p\tau} dp, \quad (8.12)$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p, t) e^{p\tau} d\tau = \frac{D^s}{d\tau^s} g_1(t, \tau). \quad (8.13)$$

Изложенная теорема в рассматриваемом случае требует некоторых пояснений. Прежде всего, напомним [48], что если функция комплексного переменного $f(p)$ имеет при $p = p_k$ полюс порядка s , то вычетом Res_{p_k} в этом полюсе называется величина

$$\text{Res}_{p=p_k} f(p) = \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} [f(p) (p - p_k)^s]_{p=p_k}. \quad (8.14)$$

В частности, если

$$f(p) = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad (8.15)$$

причем при $p = p_k$ $b(p)$ аналитична, а $a(p)$ имеет нуль кратности 1, то

$$\text{Res}_{p_k} f(p) = \frac{b(p_k)}{a'(p_k)}. \quad (8.16)$$

Существенным требованием, входящим в условия сформулированной теоремы, является независимость полюсов передаточной функции от t . В рассматриваемых далее классах задач это требование всегда выполняется.

В дальнейшем везде, где это не оговорено особо, будем предполагать, что рассматриваемые изображения удовлетворяют условиям сформулированной теоремы.

Если предположить, что простыми полюсами передаточной функции $W(p, t)$ являются числа p_i , а простыми полюсами изображения $X(p)$ являются числа v_k , причем $p_i \neq v_k$, то функция $W(p, t)X(p)$ будет иметь только простые полюсы и из (10) и (4) получится

$$y(t) = \sum_i \text{Res}_{p_i} W(p, t) X(p_i) e^{p_i t} + \sum_k W(v_k, t) \text{Res}_{v_k} X(p) e^{v_k t}. \quad (8.17)$$

Первое слагаемое в правой части дает переходную составляющую $y(t)$, а второе — установившуюся. Если среди полюсов p_i, v_k есть кратные или среди p_i, v_k есть числа равные, то изображение $W(p, t)X(p)$ будет иметь кратные полюсы, и выражение для $y(t)$ несколько усложнится. Если предположить, что $X(p) = 1$, то по (9) и (17) получим выражение для весовой функции

$$h(t, \xi) = \sum_k \text{Res}_{p_k} W(p, t) e^{p_k(t-\xi)}, \quad (8.18)$$

причем в силу периодичности передаточной функции по t имеем

$$u_k(t) = \text{Res}_{p_k} W(p, t) = u_k(t + T). \quad (8.19)$$

Отсюда вытекает, что при простых полюсах передаточной функции весовая функция линейной периодической системы может быть представлена в виде

$$h(t, \xi) = \sum_k u_k(t) e^{p_k(t-\xi)}, \quad u_k(t) = u_k(t + T). \quad (8.20)$$

Совершенно аналогично, используя (10) и (17), можно показать, что в случае кратных полюсов p_k выражение весовой функции будет следующим:

$$h(t, \xi) = \sum_k v_k(t) e^{p_k(t-\xi)}, \quad (8.21)$$

где функции v_k имеют вид

$$v_k(t) = \sum_{i=1}^s v_{ik}(t) t^i, \quad v_{ik}(t) = v_{ik}(t + T), \quad (8.22)$$

т. е. представляют собой полиномы от t с коэффициентами, являющимися периодическими функциями t .

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Поскольку $h(t, \xi)$ является реакцией системы на входной сигнал $\delta(t - \xi)$, а $\delta(t - \xi) = 0$ при $t > \xi$, то весовая функция $h(t, \xi)$ по аргументу t является при $t > \xi$ решением исходного уравнения движения в отсутствие внешнего возбуждения.

При этом, поскольку функции $u_k e^{p_k t}$ линейно независимы при различных k , то по (20) можно утверждать, что если p_k — простой полюс передаточной функции, то исходное уравнение при отсутствии внешнего возбуждения имеет решение вида

$$y_c = u(t) e^{\lambda t}, \quad u(t) = u(t + T), \quad \lambda = p_k. \quad (8.23)$$

Нетрудно доказать, что решение вида (23) будет соответствовать и кратному полюсу p_k .

Введем теперь новое определение. Будем называть *характеристическим показателем* линейной периодической системы число λ , которому в отсутствие внешнего возбуждения соответствует решение исходного уравнения вида (23). Тогда из сказанного следует, что каждый полюс передаточной функции является характеристическим показателем системы. Отметим теперь, что если p_k — полюс передаточной функции, то все числа $p_{ks} = p_k + si\omega$, где s — целое число, также являются характеристическими показателями, так как если (23) — решение исходной системы, то

$$y_c = u_s(t) e^{p_{ks} t}, \quad u_s(t) = e^{-si\omega t} u(t) = u_s(t - T). \quad (8.24)$$

Можно доказать, что при сделанных предположениях числами p_{ks} исчерпывается все множество характеристических показателей системы. Более подробно этот вопрос изложен в гл. III.

Отметим также, что применение теоремы о вычетах — далеко не единственный способ построения переходных процессов. При определении y из формулы (4)

можно использовать все приемы вычисления обратного преобразования Лапласа, например теорему свертки, разложения в ряды, асимптотические разложения и т. п.

Знание передаточной функции также позволяет исследовать поведение рассматриваемых систем при случайных воздействиях и т. д.

Вообще нужно иметь в виду следующее. Для нестационарных систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, техника использования параметрических передаточных функций для решения разнообразных задач анализа и синтеза разрабатывается в литературе уже давно. В основе всех этих методов лежат соотношения вида (4), (8) и (9).

Так как передаточные функции изучаемого в настоящей книге более широкого класса систем также удовлетворяют этим соотношениям, то все разработанные в литературе методы использования параметрических передаточных функций применимы и в рассматриваемых задачах.

§ 9. Устойчивость линейных периодических систем

Пусть имеем некоторую нестационарную линейную систему с весовой функцией $h(t, \xi)$, обладающей свойством физической реализуемости. Если к предварительно невозбужденной системе при $t = 0$ прилагается внешнее возбуждение $x(t)$, то, по предыдущему, имеем

$$y(t) = \int_0^t h(t, \xi) x(\xi) d\xi. \quad (9.1)$$

В настоящем параграфе везде предполагается, что x , y , h — обыкновенные кусочно-непрерывные функции своих аргументов.

В соответствии с [6] систему (1) с весовой функцией $h(t, \xi)$ будем называть *устойчивой*, если из условия $|x(t)| < k$, $k = \text{const}$, следует

$$|y(t)| \leq kf, \quad (9.2)$$

где $y(t)$ определяется соотношением (1), а f — постоянная, не зависящая от $x(t)$.

Иными словами, система считается *устойчивой*, если реакции невозбужденной системы на равномерно ограниченные внешние воздействия равномерно ограничены. Покажем, что для устойчивости в указанном смысле необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_t \int_0^t |h(t, \xi)| d\xi \leq f, \quad t > 0. \quad (9.3)$$

Достаточность условия (3) для устойчивости доказывается сразу. Действительно, если (3) выполнено и $|x(t)| < k$, то, оценивая в (1) y по модулю, имеем

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(t, \xi)| |x(\xi)| d\xi < k \int_0^t |h(t, \xi)| d\xi \leq kf,$$

что в соответствии с (2) и свидетельствует об устойчивости.

Для доказательства необходимости условия (3) покажем, что если оно нарушается, то устойчивости в указанном смысле быть не может.

Предположим обратное, что величина

$$J(t) = \int_0^t |h(t, \xi)| d\xi \quad (9.4)$$

не ограничена, но система устойчива, т. е. выполнено условие (2). Тогда для любого входного сигнала $x(t)$ такого, что $x(t) \leq 1$, из (2) следует, что

$$|y(t)| < f, \quad (9.5)$$

где f — некоторая постоянная.

С другой стороны, так как величина $J(t)$ не ограничена, то существует такое $t = t_1$, что

$$J(t_1) = \int_0^{t_1} |h(t_1, \tau)| d\tau > f.$$

Но тогда, положив

$$x(\tau) = \text{sign}[h(t_1, \tau)],$$

из (1) получим

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_0^{t_1} h(t_1, \tau) \operatorname{sign} [h(t_1, \tau)] d\tau = \\ &= \int_0^{t_1} |h(t_1, \tau)| d\tau = J(t_1) > f. \end{aligned}$$

Полученное неравенство противоречит (5).

Из полученного противоречия и вытекает необходимость условия (3).

Приведенное доказательство не использует факта периодичности системы и справедливо для произвольной нестационарной системы, описываемой оператором (1).

В дополнение к приведенному доказательству сделаем ряд общих замечаний.

1. В ряде работ по теории регулирования условие устойчивости нестационарной системы (1) записывается в виде, отличном от (3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |h(t, \tau)| d\tau < f = \text{const.} \quad (9.6)$$

Легко видеть, что если это условие выполнено, то выполнено и (3); поэтому условие (6) является достаточным для устойчивости. Однако оно не является необходимым, так как легко привести примеры, когда условие (3) выполняется, а (6) — нет.

Пример 9.1. Если

$$h(t, \tau) = \sin t e^{-\lambda \tau}, \quad \lambda > 0, \quad (9.7)$$

то интеграл

$$J(t) = |\sin t| \int_0^t e^{-\lambda \tau} d\tau = |\sin t| \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \quad (9.8)$$

ограничен и условие (3) выполнено, однако $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$ не существует.

2. В ряде работ в качестве необходимого условия устойчивости предлагается условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t, \tau)| = 0. \quad (9.9)$$

Однако на примере весовой функции (7) видно, что это условие в общем случае не является необходимым.

3. В некоторых работах в качестве критерия устойчивости нестационарной системы предлагается сходимость интеграла

$$J_t = \int_0^{\infty} |h(t, \tau)| d\tau < f. \quad (9.10)$$

На примере весовой функции (7) легко проверить, что условие (10) не может в общем случае служить необходимым критерием устойчивости, так как для весовой функции (7) интеграл

$$J_t = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} |\sin \tau| d\tau,$$

расходится, но система устойчива.

Если же взять весовую функцию

$$h(t, \tau) = \frac{1}{t^2 + 1} e^{\lambda \tau}, \quad \lambda > 0,$$

соответствующую по (3) неустойчивой системе, то условие (10) выполняется при всех τ . Таким образом, условие (10) в общем случае не является необходимым и не является достаточным для устойчивости.

Для стационарной системы, когда $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, условие устойчивости, получаемое из (3), имеет вид

$$\max_t \int_0^t |h(t - \tau)| d\tau < f. \quad (9.11)$$

Полагая здесь $\xi = t - \tau$, условие устойчивости стационарной системы представим в виде

$$\max_t \int_0^t |h(\xi)| d\xi < f. \quad (9.12)$$

Если учесть положительность подынтегральной функции, то легко убедиться, что необходимым и достаточным условием устойчивости стационарной системы является существование интеграла

$$J_c = \int_0^{\infty} |h(\xi)| d\xi, \quad (9.13)$$

Если аналогичным образом преобразовать выражение в левой части (3), то критерий устойчивости нестационарной системы (3) при замене $t - \tau = \xi$ примет вид

$$\max_t \int_0^t |g(t, \xi)| d\xi < f, \quad (9.14)$$

где функция

$$g(t, \xi) = h(t, t - \xi)$$

определена соотношением (8.8).

Основным обстоятельством, определяющим все дальнейшее, служит то, что для периодической системы функция $g(t, \xi)$ ограничена по t , если этими свойствами обладает передаточная функция $W(p, t)$. Далее, как и выше, предполагается, что $W(p, t)$ ограничена по t ; тогда из (8.8) следует, что при любом t справедлива оценка вида

$$|g(t, \xi)| \leq r(\xi),$$

где $r(\xi)$ — некоторая положительная функция ξ , свойства которой нас не интересуют.

Если в функции $g(t, \xi)$ положить $t = \alpha$, то мы получим выражение $g(\alpha, \xi)$, соответствующее системе, «замороженной» в момент $t = \alpha$. Придавая параметру α постоянные значения $0 \leq \alpha \leq T$, мы получим семейство стационарных систем, каждой из которых соответствует своя функция $g(\alpha, \xi)$.

Из формулы (8.8) непосредственно следует, что

$$g(\alpha, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, \alpha) e^{p\xi} dp, \quad (9.15)$$

т. е. функция $g(\alpha, \xi)$ является обратным преобразованием Лапласа от «замороженной» передаточной

функции $W(p, \alpha)$. Условием устойчивости каждой «замороженной» системы, в соответствии с (13), является существование интегралов

$$J_c(\alpha) = J_c(\alpha - T) = \int_0^{\infty} |g(\alpha, y)| dy. \quad (9.16)$$

Допустим, что все эти интегралы существуют и, следовательно, каждая из «замороженных» систем устойчива. Тогда возникает естественный вопрос, нельзя ли из этого факта вывести какие-либо заключения относительно устойчивости исходной нестационарной системы. Оказывается, что на этот вопрос можно ответить утвердительно. Имеет место следующее утверждение:

Если интеграл (16) существует при всех $0 \leq \alpha \leq T$, т. е. все замороженные системы при $t = \alpha$ устойчивы, и существует не зависящее от α число f такое, что

$$J_c(\alpha) < f, \quad (9.17)$$

то исходная нестационарная периодическая система (1) устойчива.

Для доказательства сформулированного утверждения положим

$$J(\alpha, t) = \int_0^t |g(\alpha, \xi)| d\xi. \quad (9.18)$$

Из (18) непосредственно следует, что

$$J(\alpha, t_2) \geq J(\alpha, t_1) \quad \text{при} \quad t_2 > t_1; \quad (9.19)$$

отсюда, учитывая, что

$$J_c(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} J(\alpha, t), \quad (9.20)$$

получаем:

$$J(\alpha, t) \leq J_c(\alpha) < f \quad (9.21)$$

при всех α и t . В частности, неравенства (21) должны иметь место при $\alpha = t$, т. е.

$$J(t, t) < f.$$

Но непосредственно из (18) следует, что последнее неравенство эквивалентно (14), что и доказывает требуемое.

Таким образом, исследование устойчивости периодических линейных систем на основе критерия (17) сводится в принципе к более простой задаче исследования устойчивости стационарной системы.

Если известна весовая функция $h(t, \tau)$, то применение критерия (17) для исследования устойчивости сведется к проверке факта существования интегралов (16) и выполнения условия (17).

Практически, однако, весовая функция обычно неизвестна и интерес представляет исследование устойчивости непосредственно по передаточной функции. Если обратиться к выражениям для весовой функции (8.21) и (8.20), то очевидно, что условия (17) будут выполняться, если существует положительное число β такое, что

$$\operatorname{Re} p_k < -\beta, \quad (9.22)$$

так как в этом случае из (8.21) и (8.20) следует, что

$$|g(t, \tau)| < B e^{-\beta \tau}, \quad (9.23)$$

где B — некоторая постоянная.

Учитывая, что p_k — полюсы передаточной функции, приходим к следующему утверждению: если передаточная функция линейной периодической системы удовлетворяет условиям теоремы § 8, то система устойчива, если полюсы передаточной функции удовлетворяют условию (22).

Следует отметить также, что условие (22) является достаточным для устойчивости и в ряде случаев, когда условия теоремы § 8 не выполнены, например в том случае, когда разложения (8.21), (8.20) не сходятся в классическом смысле, но являются асимптотическими разложениями весовой функции. Подробности, касающиеся этого вопроса, читатель может найти в [27]. Фактически же основную роль для всего сказанного выше играет выполнение неравенства (23) или какого-нибудь другого соотношения, обеспечивающего выполнение условия (17).

В частности, условие (23) будет выполнено и, соответственно, изучаемая система будет устойчива, если

$$\sup_{\sigma < -\beta} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\sigma + i\omega, t)|^2 d\omega < \infty, \quad (9.24)$$

причем передаточная функция является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p < -\beta$. В этом случае [27] имеет место соотношение

$$\int_0^{\infty} |g(t, \tau)|^2 e^{2\beta\tau} d\tau < \infty, \quad (9.25)$$

т. е. по крайней мере

$$|g(t, \tau)| < B e^{-\beta\tau},$$

что совпадает с (23).

При этом, обратно, из (25) следует (24). Подчеркнем также, что выполнение условия (17) предполагается при всех $0 \leq \alpha \leq T$. Выполнение условия (17) на некотором промежутке отрезка $0 \leq \alpha \leq T$ или тем более в его отдельных точках не гарантирует, в общем случае, устойчивости системы.

Пример 9.2. Пусть

$$W(p, t) = \frac{1}{p+1} + \frac{\sin t}{p-1}. \quad (9.26)$$

Система с такой передаточной функцией неустойчива. В то же время

$$W(p, 0) = \frac{1}{p+1}. \quad (9.27)$$

Поэтому рассматривая передаточную функцию лишь при $t = 0$, можно прийти к ошибочному заключению о том, что система устойчива.

В то же время, если значение $t = \alpha$ таково, что передаточная функция $W(p, \alpha)$ имеет все те же полюсы, что и функция $W(p, t)$, то по передаточной функции $W(p, \alpha)$ можно судить об устойчивости исходной нестационарной системы. Например, при любом $\alpha \neq k\pi$ «замороженная» передаточная функция, получающаяся из (26) при $t = \alpha$, полностью характеризует устойчивость системы.

Соотношение (22), в соответствии с предыдущим параграфом, можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} p_{sk} < -\beta, \quad (9.28)$$

где p_{sk} — произвольный характеристический показатель системы. Но числа p_{sk} отличаются тем свойством, что им

соответствуют решения вида (8.24). Поэтому, полагая в исходной системе в отсутствие внешнего возбуждения

$$y = e^{\lambda t} y_{\Pi}(t), \quad (9.29)$$

характеристические числа можно найти как такие значения λ , при которых $y_{\Pi}(t) = y_{\Pi}(t - T)$. Обычно условия существования таких λ сводятся к существованию корней некоторого уравнения, которое называется характеристическим.

При этом необходимым условием устойчивости будет выполнение для корней уравнения условий (28). Следует подчеркнуть, однако, что справедливости условий (28) в общем случае недостаточно для устойчивости системы, так как при выполнении условий (28) система будет устойчива лишь при выполнении определенных требований на поведение передаточной функции на бесконечности (§ 8). Тем не менее для многих практически важных классов систем условия (28) являются не только необходимыми, но и достаточными для устойчивости. Ниже при изучении устойчивости конкретных классов систем мы остановимся на этом вопросе подробнее.

§ 10. Многомерные линейные периодические системы

В настоящем параграфе изложенные выше результаты переносятся вкратце на многомерный случай. Основные соотношения здесь приводятся без доказательства и подробных пояснений, так как они получаются почти дословным повторением в матричных обозначениях доказательств, приведенных для скалярного случая.

Пусть A , X — матрицы конечного размера, элементами которых являются обобщенные функции. Тогда, по определению [110],

$$Y = H * X \quad (10.1)$$

— матрица, элементы которой определяются соотношением

$$y_{is} = \sum_k h_{ik} * x_{ks}, \quad (10.2)$$

где h_{ik} , x_{ks} — соответственно элементы H и X . Звездочка, как и ранее, означает операцию свертки обобщенных

функций. При этом в (1) и далее предполагается, что матрицы, входящие в соответствующие соотношения, имеют размеры, необходимые для того, чтобы эти соотношения имели смысл.

Соотношение (1) можно рассматривать как линейный оператор со входом X и выходом Y . Непосредственно из (2) и свойств свертки вытекает, что

$$Y(t - \tau) = H * X(t - \tau), \quad (10.3)$$

т. е. оператор (1) — стационарный. Если, в частности,

$$X = e^{pt} E, \quad (10.4)$$

где E — единичная матрица, то из (1) и (2) получим

$$Y = W(p) e^{pt} = H * E e^{pt}. \quad (10.5)$$

Матрица $W(p)$ называется *передаточной матрицей оператора* (1).

Если же в (1)

$$X(t) = \delta(t) E, \quad (10.6)$$

то

$$Y = H, \quad (10.7)$$

т. е. матрица H является *весовой матрицей оператора* (1).

Из (5) следует, что передаточная матрица (если она существует) является преобразованием Лапласа от весовой функции. В этом случае справедлива формула обращения

$$H = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p) e^{pt} dp. \quad (10.8)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$Y = \sum_k A_k(t) [H_k * X], \quad (10.9)$$

где A_k — матрицы соответствующих размеров, элементы которых являются обыкновенными функциями. Если

$$A_k(t) = A_k(t - T), \quad (10.10)$$

то выражение (9) определяет линейный периодический оператор. При входном сигнале (4) из (9) получим

$$Y = W(p, t) e^{pt}, \quad W(p, t) = W(p, t - T), \quad (10.11)$$

где

$$W(p, t) = \sum_k A_k(t) L(H_k) \quad (10.12)$$

— передаточная матрица оператора (9). Полагая входной сигнал равным (6), получим

$$G(t, \xi) = \sum_k A_k(t) H_k(\xi). \quad (10.13)$$

При этом весовая матрица оператора (9) выразится следующим образом:

$$H(t, \xi) = \sum A_k(t) H_k(t - \xi). \quad (10.14)$$

Формулы (14) и (12) позволяют найти передаточную матрицу по весовой матрице. Обратно, весовая матрица связана с передаточной матрицей соотношением

$$H(t, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p(t-\xi)} dp. \quad (10.15)$$

Кроме того,

$$G(t, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) e^{p\xi} dp. \quad (10.16)$$

В дальнейшем для сокращения записи вместо (9) будем писать

$$Y = W(p, t) X. \quad (10.17)$$

Пусть теперь имеем систему

$$W_1(p, t) Y = W_2(p, t) X, \quad (10.18)$$

где $W_1(p, t)$, $W_2(p, t)$ — передаточные матрицы линейных периодических операторов. Передаточной матрицей $W_c(p, t)$ системы (18) будем называть передаточную матрицу определяемого этой системой линейного периодического оператора (если он существует).

Если положить

$$X = e^{\lambda t} E, \quad Y = W_c(\lambda, t) e^{\lambda t}, \quad W_c(\lambda, t) = W_c(\lambda, t + T), \quad (10.19)$$

то из (18), совершенно аналогично выводу уравнения (5.21), получим

$$W_1(p + \lambda, t) W_c(\lambda, t) = W_2(\lambda, t), \quad (10.20)$$

причем передаточная матрица $W_c(\lambda, t)$ является периодическим решением уравнения (20).

Имея передаточные матрицы многомерных элементов, можно составлять передаточные матрицы сложных систем. Для этого следует ввести в рассмотрение понятия матричной СИЧХ, которая для системы (17) имеет вид

$$\Phi(T, p, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + k i \omega, t) e^{k i \omega (t - \tau)}. \quad (10.21)$$

При этом, если в уравнении (17)

$$X(t) = e^{\lambda t} X_{\Pi}(t), \quad X_{\Pi}(t) = X_{\Pi}(t + T), \quad (10.22)$$

то, аналогично (6.17), имеем

$$Y(t) = e^{\lambda t} \int_0^T \Phi(T, \lambda, t, t - \tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau. \quad (10.23)$$

Формула (23) позволяет найти передаточную матрицу последовательного соединения многомерных периодических элементов. Именно, если

$$\left. \begin{aligned} Y &= W_2(p, t) Z, \quad Z = W_1(p, t) X, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t + T), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

то, аналогично выводу формулы (6.31), показывается, что передаточная матрица системы (24) равна

$$W_c(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(p + k i \omega, t) W_{1k}(p) e^{k i \omega t}, \quad (10.25)$$

где

$$W_{1k}(p) = \frac{1}{T} \int_0^T W_1(p, \tau) e^{-k i \omega \tau} d\tau. \quad (10.26)$$

Формула (25) эквивалентна следующей:

$$W_c(p, t) = \int_0^T \Phi_2(T, p, t, t - \tau) W_1(p, \tau) d\tau. \quad (10.27)$$

При параллельном соединении многомерных периодических элементов их передаточные матрицы складываются, если только они представляют собой матрицы одинакового размера.

В случае системы с обратной связью для передаточной матрицы может быть получено интегральное уравнение, аналогичное (7.8). Если имеем

$$\left. \begin{aligned} Y &= W_1(p, t)(Z + X), \quad Z = W_2(p, t)Y, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t + T), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

то передаточная матрица системы $W_c(p, t)$ определяется уравнением

$$W_c(p, t) = \int_0^T k(p, t, \tau) W_c(p, \tau) d\tau + W_1(p, t), \quad (10.29)$$

где

$$k(p, t, \tau) = \int_0^T \Phi_1(T, p, t, t - q) \Phi_2(T, p, q, q - \tau) dq. \quad (10.30)$$

Перейдем теперь к рассмотрению переходных процессов и устойчивости многомерных линейных периодических систем. Если на вход оператора (17) действует внешнее возбуждение $X(t)$, имеющее преобразование Лапласа $X(p)$, то выходная матрица $Y(t)$ определяется соотношением

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) X(p) e^{pt} dp, \quad (10.31)$$

причем, по предположению, все полюсы передаточной матрицы $W(p, t)$ и изображения $X(p)$ лежат слева от прямой $\operatorname{Re} p = C$. Для построения критериев устойчивости многомерной периодической системы необходимо использовать понятие *нормы матрицы*. В общем случае

понятие нормы матрицы можно ввести различным образом [6]. Здесь нормой $N(A)$ прямоугольной матрицы A с элементами a_{ij} будем называть величину

$$N(A) = \max_i \sum_j |a_{ij}|. \quad (10.32)$$

Систему (17) мы будем называть устойчивой, если из условия

$$N(X) \leq k, \quad k = \text{const}, \quad (10.33)$$

следует

$$N(Y) \leq kf, \quad (10.34)$$

где f — постоянная, не зависящая от X .

Можно доказать с помощью соображений, примененных в скалярном случае, что для устойчивости в указанном смысле необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_t \int_0^t N[G(t, \xi)] d\xi \leq f, \quad (10.35)$$

где матрица $G(t, \xi)$ определяется соотношением (13) и предполагается, что $G(t, \xi)$ — обыкновенная функция обоих аргументов, ограниченная (и периодическая) по t .

Из соотношений (34), (35), как и в скалярном случае, следует, что при этих предположениях исследование устойчивости нестационарной системы сводится к исследованию устойчивости семейства стационарных систем с передаточными функциями $W(p, \alpha)$. Достаточным условием устойчивости будет условие, аналогичное (9.17).

$$\max_{\alpha} \int_0^{\infty} N[G(\alpha, \xi)] d\xi \leq f = \text{const}. \quad (10.36)$$

Если каждый из элементов передаточной матрицы $W(p, t)$ удовлетворяет условиям теоремы, сформулированной в § 8, то условием устойчивости системы будет расположение полюсов передаточной матрицы в левой полуплоскости.

ФИЛЬТРУЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Вводные замечания

В данной главе указан ряд особенностей и рассматриваются методы исследования линейных периодических систем, обладающих фильтрующими свойствами. При этом понятию фильтрующих свойств дается вполне определенная математическая формулировка. Обычно в руководствах по теории автоматического управления стационарная система называется *фильтрующей*, если

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0, \quad (0.1)$$

где

$$A(\omega) = |W(i\omega)| \quad (0.2)$$

— амплитудно-частотная характеристика. Физически условие (1) означает, что установившаяся реакция системы на гармонический сигнал стремится к нулю при возрастании частоты входного сигнала.

В последующем изложении *линейная периодическая система называется фильтрующей*, если при любом вещественном a

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W(a + i\omega, t)| = 0, \quad (0.3)$$

причем стремление к пределу происходит настолько быстро, что соответствующая СИЧХ

$$\varphi(T, p, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + k i \omega, t) e^{k i \omega \tau}$$

является обыкновенной и достаточно «хорошей» функцией аргументов t и τ . Условие (3), так же как и (1), имеет определенный физический смысл и сводится к требованию, чтобы установившаяся реакция системы на входной сигнал вида

$$x = e^{(a + i\nu)t} x_{\text{п}}(t), \quad x_{\text{п}}(t) = x_{\text{п}}(t + T), \quad (0.4)$$

где ν — положительное число, достаточно быстро стремилась к нулю при $\nu \rightarrow \infty$.

Основным обстоятельством, на котором строится глава, является тот факт, что при выполнении условий фильтра (в указанном смысле) для разомкнутой системы изучение основных характеристик замкнутой системы сводится к применению мощного математического аппарата интегральных уравнений Фредгольма II рода. Из самого факта сводимости задачи к уравнениям этого класса следует ряд важных качественных свойств системы, а также возможность применения для ее исследования хорошо развитых вычислительных алгоритмов.

Центральным результатом главы является установление того факта, что СИЧХ фильтрующей системы, охваченной жесткой обратной связью, является резольвентой Фредгольма для СИЧХ разомкнутой системы.

Первый параграф главы посвящен обсуждению и математическому определению фильтрующих свойств. В следующем параграфе излагается ряд, в основном известных, сведений об интегральных уравнениях Фредгольма II рода. Эти сведения используются в § 3 для изучения линейных фильтрующих периодических систем с обратной связью. Здесь же приводятся способы проверки наличия фильтрующих свойств у ряда практически важных систем. Заключительные параграфы главы посвящены изложению некоторых приближенных способов исследования, основанных на рассмотрении интегральных уравнений соответствующей задачи.

§ 1. О фильтрующих свойствах линейных периодических систем

Известно, что большинство реальных стационарных линейных элементов, встречающихся в системах управления, обладают *фильтрующими свойствами*, т. е. способностью не пропускать высокочастотные входные сигналы.

Это обстоятельство часто оказывается важным для понимания природы динамических процессов, происходящих во многих системах управления, и лежит в основе ряда приближенных методов исследования [62, 75].

В настоящем параграфе показывается, что понятие фильтра может быть обобщено в некотором смысле и на

нестационарные периодические системы. Как будет показано ниже, линейные периодические системы, обладающие свойствами фильтра, характеризуются рядом важных свойств, которыми не обладают в общем случае произвольные периодические системы.

Линейную периодическую систему

$$y = W(p, t)x, \quad W(p, t) = W(p, t + T) \quad (1.1)$$

будем называть фильтрующей, если ее смещенная импульсно-частотная характеристика

$$\varphi(T, p, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega, t) e^{ki\omega\tau} \quad (1.2)$$

является обыкновенной функцией p , t и τ , т. е. такой, что существует и ограничен при всех t интеграл

$$J(p, t) = \int_0^T |\varphi(T, p, t, \tau)|^2 d\tau \leq A(p) \quad (1.3)$$

при всех значениях p , не являющихся особыми точками функции φ . Такие значения $p \neq p_i$ мы называем *неособыми*. По предположению p_i не зависят от t и τ .

Для выяснения физического смысла введенного понятия фильтрующей системы целесообразно преобразовать интеграл в правой части (3). Для этого заметим, что

$$|\varphi(T, p, t, \tau)|^2 = \varphi(T, p, t, \tau) \bar{\varphi}(T, p, t, \tau), \quad (1.4)$$

где черта сверху означает комплексно-сопряженную величину. Но, предполагая, что передаточная функция $W(p, t)$ является вещественной функцией своих аргументов, а p — комплексное число, из (2) получим

$$\bar{\varphi}(T, p, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\bar{p} - ki\omega, t) e^{-ki\omega\tau}. \quad (1.5)$$

Подставляя (2), (5) и (4) в (3), после интегрирования получим

$$J(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega, t) W(\bar{p} - ki\omega, t). \quad (1.6)$$

Применяя такой же способ вычислений, легко показать также, что

$$\int_0^T |\varphi(T, p, t, t - \tau)|^2 d\tau = J(p, t). \quad (1.7)$$

Таким образом, по определению, система (1) является фильтрующей, если сходится при всех неособых значениях p ряд в правой части (6).

Используя соотношение (6), можно показать, что введенное понятие фильтрующих свойств тесно связано с классическим понятием фильтра, широко применяемым в автоматике.

Покажем это на примере стационарной системы. Действительно, если в (1)

$$W(p, t) = W(p),$$

то из (6) получаем, что стационарная система является фильтрующей, если при всех неособых значениях p сходится ряд

$$J(p) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega) W(\bar{p} - ki\omega). \quad (1.8)$$

В частности, при $p = 0$ должен сходиться ряд

$$J(0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega) W(-ki\omega). \quad (1.9)$$

Но, как известно [66],

$$W(i\omega) W(-i\omega) = A^2(\omega), \quad (1.10)$$

где $A(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика стационарной системы. Поэтому из (9) получаем

$$J(0) = \frac{1}{T} A^2(0) + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A^2(k\omega). \quad (1.11)$$

Для сходимости этого ряда необходимо во всяком случае, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0, \quad (1.12)$$

Условие (12) совпадает с обычно применяемым определением фильтрующей линейной стационарной системы.

Следует, однако, иметь в виду, что выполнение условия (12) в общем случае вовсе не гарантирует сходимости ряда (11) и тем более ряда (8).

Так как при $x = e^{i\omega t}$

$$y = W(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (1.13)$$

то условие (12) означает только, что установившаяся реакция системы на гармоническое воздействие стремится к нулю с ростом частоты входного сигнала. Однако условие (12), вообще говоря, ничего не говорит о поведении системы при воздействии входных сигналов более сложной формы.

Условия фильтра, сводящиеся к сходимости рядов (8) и (11), являются в этом смысле более универсальными. Действительно, пусть, например

$$x(t) = e^{i\nu t} x_n(t), \quad x_n(t) = x_n(t + T), \quad (1.14)$$

где $\nu > 0$ — произвольное вещественное число; тогда по (II. 3.23) установившаяся реакция стационарной системы имеет вид

$$y(t) = e^{i\nu t} y_n(i\nu, t), \quad (1.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_n(i\nu, t) &= \int_0^T \varphi(T, i\nu, t - \tau) x_n(\tau) d\tau, \\ \varphi(T, i\nu, t - \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(i\nu + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Покажем, что при условии сходимости ряда (8)

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |y_n(i\nu, t)| = 0 \quad (1.17)$$

при любом фиксированном сигнале $x_n(t)$.

Действительно, пусть $|x_n(t)| \leq m$; тогда из (16) имеем

$$\begin{aligned} |y_n(i\nu, t)| &\leq \int_0^T |\varphi(T, i\nu, t - \tau)| |x_n(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq m \int_0^T |\varphi(T, i\nu, t - \tau)| d\tau = m \int_0^T |\varphi(T, i\nu, \tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Но в соответствии с неравенствами Буняковского — Шварца [53] имеем

$$\int_0^T |\varphi(T, i\nu, \tau)| d\tau \leq \sqrt{T} \sqrt{\int_0^T |\varphi(T, i\nu, \tau)|^2 d\tau}, \quad (1.19)$$

что с учетом (3) равносильно следующему:

$$\int_0^T |\varphi(T, i\nu, \tau)| d\tau \leq \sqrt{TJ(i\nu)}, \quad (1.20)$$

где по (8)

$$J(i\nu) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(i\nu + k i\omega) W(-i\nu - k i\omega).$$

Если учесть, что

$$W(i\nu + k i\omega) W(-i\nu - k i\omega) = A^2(\nu + k\omega),$$

то

$$J(i\nu) = \frac{A^2}{T}(\nu) + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A^2(\nu + k\omega). \quad (1.21)$$

С учетом (20) и (21) из (18) получаем

$$|y_{\pi}(i\nu, t)| \leq m \sqrt{A^2(\nu) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A^2(\nu + k\omega)}. \quad (1.22)$$

Поскольку ряд в подкоренном выражении, по предположению, сходится, то, устремляя ν к ∞ и учитывая (12), придем к соотношению (17).

Таким образом, сходимость ряда (8) гарантирует наличие фильтрующих свойств при произвольных входных сигналах вида (14).

Все сказанное непосредственно распространяется на нестационарную систему (1). В частности, при $p = 0$ из (6) получаем

$$J(0, t) = \frac{1}{T} A^2(0, t) + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A^2(k\omega, t), \quad (1.23)$$

где

$$A(\omega, t) = |W(i\omega, t)| \quad (1.24)$$

— амплитудно-частотная характеристика системы (1), являющаяся периодической функцией аргумента t . При этом из сходимости ряда в (23) следует

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega, t) = 0, \quad (1.25)$$

что аналогично (12).

Нетрудно также убедиться, как и в стационарном случае, в том, что существование интеграла (3) гарантирует наличие фильтрующих свойств системы (1) при входных сигналах вида (14). Это вытекает из того, что при выполнении (14) установившийся выход имеет вид, определяемый формулой (II. 6.17):

$$y(t) = e^{ivt} y_n(iv, t) = e^{ivt} \int_0^T \varphi(T, iv, t, t - \tau) x_n(\tau) d\tau. \quad (1.26)$$

При этом почти дословное повторение рассуждений, приведших к неравенству (22), в нестационарном случае дает

$$|y_n(iv, t)| \leq m \sqrt{A^2(v, t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A^2(v + k\omega, t)}, \quad (1.27)$$

откуда снова вытекает соотношение (17).

Как следует из сказанного, условие (25) является в общем случае лишь необходимым для наличия фильтра в смысле данного выше определения. Однако если при любом неособом p величина $|W(p + i\omega)|$ стремится при $\omega \rightarrow \infty$ к нулю достаточно быстро, то система является фильтрующей. В частности, если при каждом неособом значении $p = a + i\omega l$

$$|W(p, t)| = |W(a + i\omega l, t)| < \frac{c(p)}{\omega^s}, \quad s > \frac{1}{2}, \quad (1.28)$$

где c — постоянная (зависящая от p), то ряд (6) будет сходиться, так как его члены положительны и убывают, как $\frac{1}{k^{2s}}$.

Следовательно, при выполнении (28) система (1) будет фильтрующей. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие фильтрующие системы, для которых условие (28) выполнено.

Пример 1.1. Стационарная система с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (1.29)$$

где m и n — целые числа, является фильтрующей при $n - m \geq 1$, так как при больших по модулю значениях p

$$|W(p)| \leq \frac{c}{|p|^{n-m}}, \quad (1.30)$$

где c не зависит от p , и, следовательно, условие (28) заведомо выполняется.

В приведенном примере передаточная функция стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ независимо от аргумента p . В общем же случае условие фильтра (28) требует только стремления к нулю модуля передаточной функции при стремлении к бесконечности мнимой части аргумента.

Пример 1.2. Передаточная функция

$$W(p) = \frac{e^{-p\tau}}{p}, \quad \tau > 0, \quad (1.31)$$

стремится к бесконечности при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p < 0$. Однако свойство фильтра тем не менее имеется, так как

$$W(a + i\omega) = e^{-a\tau} \frac{e^{-i\omega\tau}}{a + i\omega}$$

и, соответственно,

$$|W(a + i\omega)| \leq e^{-a\tau} \sqrt{\frac{1}{a^2 + \omega^2}} \leq \frac{e^{-a\tau}}{\omega}.$$

В то же время звено чистого запаздывания, для которого $W(p) = e^{-p\tau}$, фильтрующими свойствами не обладает.

Пример 1.3. Рассмотрение некоторых систем с распределенными параметрами приводит к передаточной функции вида [102]

$$W(p) = e^{-\tau\sqrt{p}}, \quad \tau > 0, \quad (1.32)$$

где фигурирует то значение корня, для которого

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{p} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Если

$$p = a + i\omega = \alpha e^{i\beta}, \quad \alpha = \sqrt{a^2 + \omega^2},$$

$$\cos \beta = \frac{a}{\alpha}, \quad \sin \beta = \frac{\omega}{\alpha},$$

то $\sqrt{p} = \sqrt{\alpha} \left(\cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} \right)$, и, следовательно,

$$W(a + i\omega) = e^{-\tau \sqrt{\alpha} \cos \frac{\beta}{2}} \cdot e^{-i\tau \sqrt{\alpha} \sin \frac{\beta}{2}}. \quad (1.33)$$

Из (33) следует, что

$$|W(a + i\omega)| = e^{-\tau \sqrt{\alpha} \cos \frac{\beta}{2}} = e^{-\tau \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\alpha} \right)}},$$

и при этом при любом фиксированном a и $\omega \rightarrow \infty$ выражение в правой части этого равенства стремится к нулю, как $e^{-\tau \sqrt{\frac{\omega}{2}}}$, т. е. система с передаточной функцией (32) является фильтрующей.

Пример 1.4. Рассмотрим нестационарную систему вида

$$y = W(p, t) z, \quad z = a(t) x, \quad a(t) = a(t + T), \quad (1.34)$$

где передаточная функция $W(p, t)$ соответствует фильтрующей системе, а функция $a(t)$ ограничена. Покажем, что при таких предположениях система (34) является фильтрующей. Действительно, в соответствии с (II. 6.50) СИЧХ системы (34) равна

$$\Phi_c(T, p, t, t - \tau) = \Phi(T, p, t, t - \tau) a(\tau), \quad (1.35)$$

т. е.

$$\Phi_c(T, p, t, \tau) = \Phi(T, p, t, \tau) a(t - \tau).$$

Отсюда непосредственно следует, что если существует интеграл (3), то то же самое имеет место для функции $\Phi_c(T, p, t, \tau)$. Отсюда вытекает, что безынерционный усилитель, включенный перед входом фильтрующей системы, не нарушает свойства фильтра. Легко проверить, что аналогичное обстоятельство имеет место, если безынерционный усилитель включен на выходе фильтрующей системы.

Рассмотренный пример является частным случаем задачи об исследовании фильтрующих свойств разомкну-

той последовательной цепи (II.6.26). В основу такого исследования можно положить формулу (II.6.47):

$$\varphi_c(T, p, t, t - \tau) = \int_0^T \varphi_2(T, p, t, t - q) \varphi_1(T, p, q, q - \tau) dq. \quad (1.36)$$

Из этой формулы прежде всего следует, что последовательное соединение фильтрующих элементов всегда представляет собой фильтрующую систему. Действительно, пусть

$$\int_0^T |\varphi_i(T, p, t, t - \tau)|^2 d\tau = \int_0^T |\varphi_i(T, p, t, \tau)|^2 d\tau \leq c_i(p), \quad (1.37)$$

$$i = 1, 2,$$

и рассмотрим интеграл

$$J_c(p, t) = \int_0^T |\varphi_c(T, p, t, t - \tau)|^2 d\tau = \int_0^T |\varphi_c(T, p, t, \tau)|^2 d\tau. \quad (1.38)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся общей формой неравенства Буняковского, которое для двух комплексных функций вещественного аргумента имеет вид

$$\left| \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt. \quad (1.39)$$

Применительно к формуле (36) неравенство (39) дает

$$\begin{aligned} |\varphi_c(T, p, t, t - \tau)|^2 &\leq \\ &\leq \int_0^T |\varphi_2(T, p, t, t - q)|^2 dq \int_0^T |\varphi_1(T, p, q, q - \tau)|^2 dq, \end{aligned}$$

т. е. с учетом (37)

$$|\varphi_c(T, p, t, t - \tau)|^2 \leq c_2(p) \int_0^T |\varphi_1(T, p, q, q - \tau)|^2 dq.$$

Интегрируя это неравенство по τ от 0 до T и снова используя (37), получим

$$J_c(p, t) \leq T c_1(p) c_2(p), \quad (1.40)$$

что и доказывает фильтрующие свойства последовательной цепи при условиях (37).

Следует отметить, однако, что, как и в стационарном случае, последовательная цепь может быть фильтрующей и тогда, когда некоторые из ее элементов фильтрующими не являются. Таковую возможность иллюстрирует система (34), в которой первый элемент — безынерционный усилитель — не является фильтрующим. В каждом конкретном случае проверить наличие фильтра в разомкнутой цепи в принципе всегда можно, найдя ее передаточную функцию либо вычислив СИЧХ.

Пример 1.5. СИЧХ системы (II.6.77) дается формулой (II.6.86), из которой следует, что если функция $\alpha(t)$ дифференцируема, а производная $\frac{D\varphi}{\partial t}$ является обыкновенной функцией, удовлетворяющей условиям фильтра, то система (II.6.78) будет обладать фильтрующими свойствами.

В частности, так будет, если $W(p)$ — отношение двух полиномов, причем степень числителя меньше степени знаменателя больше чем на единицу.

Нетрудно также показать, пользуясь неравенством Буняковского, что параллельное соединение конечного числа фильтрующих элементов всегда представляет собой фильтрующую систему.

Вопрос о фильтрующих свойствах систем с обратной связью более сложен и требует для изучения привлечения некоторых сведений из теории интегральных уравнений, которые будут приведены в следующем параграфе.

§ 2. Некоторые сведения об уравнениях Фредгольма II рода

В настоящем параграфе приводится ряд необходимых для дальнейшего сведений об интегральных уравнениях Фредгольма II рода [53, 64].

Уравнением Фредгольма II рода называется уравнение относительно функции $y(t)$ вида

$$y(t) = \mu \int_a^b k(t, \tau) y(\tau) d\tau + f(t), \quad (2.1)$$

где функция двух переменных $k(t, \tau)$ называется *ядром интегрального уравнения* (1) и определена в квадрате

$$a \leq t \leq b, \quad a \leq \tau \leq b, \quad (2.2)$$

который будем называть *основным*. В уравнении (1) μ — параметр, a и b — постоянные. Функцию $f(t)$, называемую *свободным членом* уравнения (1), будем считать интегрируемой. Решение уравнения (1) всегда будем искать в классе интегрируемых функций. При этом в (1) переменные t и τ считаются вещественными, а функции $y(t)$, $f(t)$, $k(t, \tau)$ могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

В дальнейшем везде, где это не оговорено особо, будем предполагать, что ядро $k(t, \tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \quad \int_a^b |k(t, \tau)|^2 d\tau \leq A, \quad (2.3)$$

где A — некоторая постоянная.

2. По любому данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|t_1 - t_2| < \delta$

$$\int_a^b |k(t_1, \tau) - k(t_2, \tau)| d\tau < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Если условие 2 выполнено, то ядро $k(t, \tau)$ называется непрерывным в целом. Ядро, в частности, будет непрерывным в целом, если оно удовлетворяет условию (3) и имеет разрывы только вдоль конечного числа линий, представимых уравнениями

$$\tau = g_k(t) \quad (2.5)$$

с непрерывными функциями $g_k(t)$.

Отсюда, в частности, вытекает, что ядро будет непрерывным в целом, если оно представляется в виде

$$k(t, \tau) = k_i(t, \tau) \text{ при } \tau_{i-1} < \tau < \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.6)$$

$$\tau_0 = a, \quad \tau_m = b,$$

где функции $k_i(t, \tau)$ непрерывны при $a \leq t \leq b$, $\tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i$. Случай (6) будет часто встречаться в дальнейшем.

Функция

$$k^*(t, \tau) = \overline{k(\tau, t)}, \quad (2.7)$$

где черта означает комплексно-сопряженное число, называется ядром, сопряженным данному ядру $k(t, \tau)$. Интегральное уравнение с сопряженным ядром

$$z(t) = \mu \int_a^b k^*(t, \tau) z(\tau) d\tau + r(t) \quad (2.8)$$

называется интегральным уравнением, сопряженным исходному уравнению (1).

Характер решения уравнения (1) существенно зависит от величины параметра μ . Значения μ , при которых однородное уравнение, соответствующее (1),

$$y(t) = \mu \int_a^b k(t, \tau) y(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

имеет только тривиальное решение $y(t) = 0$, называются правильными.

Те значения μ , при которых уравнение (9) имеет решения, отличные от тривиального, называются *характеристическими*.

Используя введенные понятия, можно сформулировать следующие теоремы [37, 53].

Теорема 1. Если значение μ правильное, то исходное интегральное уравнение (1) и сопряженное уравнение (8) разрешимы при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно.

Теорема 2. Уравнение (1) имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.

Теорема 3. Если значение μ характеристическое, то однородное уравнение (9), так же как и сопряженное с ним однородное уравнение, имеет нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения.

Теорема 4. Если значение μ характеристическое, то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_a^b f(\tau) \bar{z}_i(\tau) d\tau = 0, \quad (2.10)$$

где $z_i(t)$ — все линейно независимые решения сопряженного однородного уравнения. Если соотношения (10) выполнены, то функции $f(t)$ и $z_i(t)$ называются *сопряженными*.

Следует подчеркнуть, что сформулированные теоремы справедливы при выполнении одного условия (3) и не зависят от выполнения условия (4).

Теорема 5. Если свободный член уравнения (1) непрерывен, а ядро непрерывно в целом, т. е. удовлетворяет (4), то любое решение уравнения (1) непрерывно при $a \leq t \leq b$.

Все сформулированные выше теоремы носят качественный характер и не затрагивают вопроса о фактическом построении решения уравнения (1).

Важное значение для конструктивного построения решения уравнения (1) имеет некоторая функция, однозначно связанная с ядром $k(t, \tau)$ и называемая его *резольвентой*.

При всех правильных значениях μ решение уравнения (1) имеет вид

$$y(t) = \mu \int_a^b r(t, \tau, \mu) f(\tau) d\tau + f(t), \quad (2.11)$$

где $r(t, \tau, \mu)$ — резольвента. При этом, если исходное ядро удовлетворяет условию (3), то при каждом правильном значении μ резольвента, как функция переменных t и τ , будет также удовлетворять условию (3). Как функция аргументов t и τ , резольвента $r(t, \tau, \mu)$ удовлетворяет следующим двум интегральным уравнениям:

$$r(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b k(t, t_1) r(t_1, \tau, \mu) dt_1 + k(t, \tau), \quad (2.12)$$

$$r(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b k(t_1, \tau) r(t, t_1, \mu) dt_1 + k(t, \tau). \quad (2.13)$$

При сделанных выше предположениях резольвента $r(t, \tau, \mu)$ является мероморфной функцией параметра μ и представляется в виде

$$r(t, \tau, \mu) = \frac{d(t, \tau, \mu)}{d(\mu)}, \quad (2.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d(t, \tau, \mu) &= k(t, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n(t, \tau), \\ d(\mu) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

и ряды сходятся при всех значениях μ , т. е. представляют собой целые функции μ .

Различные способы фактического построения функций $d_n(t, \tau)$ и чисел d_n описаны в литературе [53, 64]. Функцию $d(\mu)$, стоящую в знаменателе выражения (14), обычно называют *знаменателем Фредгольма*.

Доказано, что $\mu = \mu_0$ является характеристическим значением параметра тогда и только тогда, когда

$$d(\mu_0) = 0. \quad (2.16)$$

При этом имеет место

Теорема 6. Всякий корень уравнения (16) является полюсом резольвенты.

Отсюда следует, что если

$$d(\mu) = (\mu - \mu_0)^k d_1(\mu), \quad d_1(\mu_0) \neq 0,$$

и одновременно

$$d(t, \tau, \mu) = (\mu - \mu_0)^l d_1(t, \tau, \mu),$$

причем существуют такие t, τ_0 , что

$$d_1(t_0, \tau_0, \mu_0) \neq 0,$$

то обязательно $k > l$.

Приведенные выше соотношения относятся к самому общему случаю. В ряде конкретных задач, однако, свободный член уравнения (1) и его ядро могут иметь специальный вид, в результате чего можно прийти к более простым общим формулам.

Рассмотрим некоторые из таких частных случаев.

1. Прежде всего рассмотрим уравнение вида

$$y(t) = \mu \int_a^b k(t, \tau) y(\tau) d\tau + \int_a^b k(t, \tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Сравнивая (17) с (1), видим, что в данном случае

$$f(t) = \int_a^b k(t, \tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Если соотношение (18) выполнено, то говорят, что свободный член $f(t)$ представим через ядро.

Покажем, что при правильных значениях μ решение уравнения (17) имеет вид

$$y(t) = \int_a^b r(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Для доказательства соотношения (19) положим в (17)

$$y(t) = z(t) - \frac{g(t)}{\mu}. \quad (2.20)$$

Тогда для функции $z(t)$ получаем из (17) уравнение

$$z(t) = \mu \int_a^b k(t, \tau) z(\tau) d\tau + \frac{g(t)}{\mu}. \quad (2.21)$$

Используя основную формулу (11), имеем

$$z(t) = \int_a^b r(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau + \frac{g(t)}{\mu}. \quad (2.22)$$

Сравнивая (22) и (20), приходим к формуле (19). Приведенные выкладки справедливы при всех $\mu \neq 0$. Однако непосредственной проверкой легко убедиться, что формула (19) верна и при $\mu = 0$, так как

$$r(t, \tau, 0) = k(t, \tau).$$

Предположим теперь, что значение $\mu = \mu_0$ — характеристическое; тогда, в соответствии с (10) и (18),

уравнение (17) разрешимо в том и только том случае, когда

$$\int_a^b \bar{z}_i(\tau) \left[\int_a^b k(\tau, s) g(s) ds \right] d\tau = 0, \quad (2.23)$$

где $z_i(t)$ — нетривиальные решения сопряженного уравнения

$$z_i(t) = \mu_0 \int_a^b \overline{k(s, t)} z_i(s) ds. \quad (2.24)$$

Переходя здесь к комплексно-сопряженным величинам, имеем

$$\bar{z}_i(\tau) = \bar{\mu}_0 \int_a^b k(s, \tau) \bar{z}_i(s) ds,$$

откуда

$$\int_a^b k(s, \tau) \bar{z}_i(s) ds = \frac{\bar{z}_i(\tau)}{\bar{\mu}_0}. \quad (2.25)$$

Если в формуле (23) произвести сначала интегрирование по τ , то с учетом (25) получим условие, эквивалентное (23), но более простое:

$$\int_a^b \bar{z}_i(\tau) g(\tau) d\tau = 0. \quad (2.26)$$

2. Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$y(t) = \mu \int_a^b n(t, \tau) b(\tau) y(\tau) d\tau + \int_a^b n(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (2.27)$$

ядро которого имеет вид

$$k(t, \tau) = n(t, \tau) b(\tau), \quad (2.28)$$

а свободный член

$$f(t) = \int_a^b n(t, \tau) g(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

представим через функцию $n(t, \tau)$.

Покажем, что при правильных значениях μ решение уравнения (27) имеет вид

$$y(t) = \int_a^b l(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

где функция $l(t, \tau, \mu)$ связана с резольвентой $r(t, \tau, \mu)$ ядра (28) соотношением

$$l(t, \tau, \mu) b(\tau) = r(t, \tau, \mu). \quad (2.31)$$

Для доказательства формул (30), (31) выведем одно вспомогательное соотношение, для чего рассмотрим интегральные уравнения резольвенты, соответствующей ядру (28). Из уравнения (13) с учетом (28) имеем

$$r(t, \tau, \mu) = \left[\mu \int_a^b n(t_1, \tau) r(t, t_1, \mu) dt_1 + n(t, \tau) \right] b(\tau). \quad (2.32)$$

Отсюда непосредственно видно, что имеет место формула (31), причем по (12) и (31)

$$l(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b n(t, s) b(s) l(s, \tau, \mu) ds + n(t, \tau). \quad (2.33)$$

Далее отметим, что если наряду с ядром (28) рассмотреть ядро

$$k_1(t, \tau) = b(t) n(t, \tau), \quad (2.34)$$

то соответствующая ему резольвента $r_1(t, \tau, \mu)$ равна

$$r_1(t, \tau, \mu) = l(t, \tau, \mu) b(t), \quad (2.35)$$

где функция $l(t, \tau, \mu)$ та же, что в (31).

Для доказательства соотношения (35) снова воспользуемся первым уравнением резольвенты (12), которое в случае (34) приобретает вид

$$r_1(t, \tau, \mu) = b(t) \left[\mu \int_a^b n(t, s) r_1(s, \tau, \mu) ds + n(t, \tau) \right]. \quad (2.36)$$

Если решение уравнения (36) искать в виде (35), то мы для функции $l(t, \tau, \mu)$ придем к уравнению, совпадающему с (33). Единственность решения уравнения Фред-

гольма при правильных значениях μ и доказывает формулу (35).

Докажем теперь основную формулу (30). Для этого умножим уравнение (27) на $b(t)$:

$$b(t) y(t) = \\ = \mu \int_a^b b(t) n(t, \tau) b(\tau) y(\tau) d\tau + \int_a^b b(t) n(t, \tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.37)$$

Полагая здесь

$$b(t) y(t) = z(t), \quad (2.38)$$

получаем новое интегральное уравнение:

$$z(t) = \mu \int_a^b b(t) n(t, \tau) z(\tau) d\tau + \int_a^b b(t) n(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (2.39)$$

что с учетом (34) можно записать в виде

$$z(t) = \mu \int_a^b k_1(t, \tau) z(\tau) d\tau + \int_a^b k_1(t, \tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Уравнение (40) имеет вид (17), поэтому, в соответствии с формулой (19), имеем

$$z(t) = \int_a^b r_1(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau. \quad (2.41)$$

Подставляя сюда (35) и (38), мы и приходим к соотношению (30).

Рассмотрим теперь условия существования решения уравнения (27), если $\mu = \mu_0$ — характеристическое значение параметра. При этом мы вместо (27) можем рассматривать эквивалентное уравнение (40). Но тогда, используя (26), можно сразу написать, что при $\mu = \mu_0$ уравнение (27) разрешимо в том и только том случае, когда

$$\int_a^b \bar{q}_i(\tau) g(\tau) d\tau = 0, \quad (2.42)$$

где $q_i(t)$ — нетривиальные решения уравнения

$$q(t) = \mu_0 \int_a^b \bar{n}(\tau, t) \bar{b}(\tau) q(\tau) d\tau. \quad (2.43)$$

Уравнение (43) не является сопряженным по отношению к (27). Однако условия (42) легко выразить через решения уравнения, сопряженного (27), которое имеет вид

$$v(t) = \mu_0 \bar{b}(t) \int_a^b \bar{n}(\tau, t) v(\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

Действительно, решения уравнений (43) и (44) связаны соотношением

$$v_i(t) = q_i(t) \bar{b}(t), \quad (2.45)$$

и поэтому соотношения (42) представляются в виде

$$\int_a^b \frac{\bar{v}_i(\tau) g(\tau)}{b(\tau)} d\tau = 0. \quad (2.46)$$

3. Для приложений, рассматриваемых в настоящей книге, интерес также будут представлять уравнения вида

$$y(t) = \mu \int_a^b k_1(t, s) ds \int_a^b k_2(s, \tau) y(\tau) d\tau + \int_a^b k_1(t, \tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.47)$$

Применение общей формулы (11) к уравнению (47) приводит к весьма громоздким и неудобным результатам. Покажем, как получить более удобную форму решения уравнения (47).

Положим

$$x(t) = \int_a^b k_2(t, \tau) y(\tau) d\tau. \quad (2.48)$$

Тогда вместо (47) можно написать

$$y(t) = \int_a^b k_1(t, \tau) [\mu x(\tau) + g(\tau)] d\tau. \quad (2.49)$$

Если подставить (49) в (48), то получим

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau + \int_a^b k(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (2.50)$$

где

$$k(t, \tau) = \int_a^b k_2(t, s) k_1(s, \tau) ds. \quad (2.51)$$

Используя (19), из (50) получаем

$$x(t) = \int_a^b r(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau, \quad (2.52)$$

где $r(t, \tau, \mu)$ — резольвента ядра (51). Подставляя (52) в (49), придем к соотношению

$$y(t) = \int_a^b l(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau, \quad (2.53)$$

где

$$l(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b k_1(t, s) r(s, \tau, \mu) ds + k_1(t, \tau). \quad (2.54)$$

Выведем интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $l(t, \tau, \mu)$. Для этого подставим решение (53) в исходное уравнение (47). Тогда получим тождество

$$\begin{aligned} & \int_a^b l(t, \tau, \mu) g(\tau) d\tau = \\ & = \mu \int_a^b \int_a^b \tilde{k}(t, s) l(s, \tau, \mu) g(\tau) ds d\tau + \int_a^b k_1(t, \tau) g(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$\tilde{k}(t, s) = \int_a^b k_1(t, u) k_2(u, s) du \quad (2.56)$$

Тождество (55) можно переписать в виде

$$\int_a^b \left[l(t, \tau, \mu) - \mu \int_a^b \tilde{k}(t, s) l(s, \tau, \mu) ds - k_1(t, \tau) \right] g(\tau) d\tau \equiv 0. \quad (2.57)$$

Так как (57) выполняется тождественно при любой функции $g(t)$, то отсюда следует, что

$$l(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b \tilde{k}(t, s) l(s, \tau, \mu) ds + k_1(t, \tau). \quad (2.58)$$

Установим теперь связь между функцией $l(t, \tau, \mu)$ и резольвентой ядра $\tilde{k}(t, s)$ уравнения (47). Составим сначала, пользуясь (12), интегральное уравнение резольвенты для ядра (56). Обозначая соответствующую резольвенту через $\tilde{r}(t, \tau, \mu)$, имеем

$$\tilde{r}(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b \tilde{k}(t, s) \tilde{r}(s, \tau, \mu) ds + \tilde{k}(t, \tau). \quad (2.59)$$

С другой стороны, умножая уравнение (58) на $k_2(\tau, u)$, имеем

$$\begin{aligned} l(t, \tau, \mu) k_2(\tau, u) &= \\ &= \mu \int_a^b \tilde{k}(t, s) l(s, \tau, \mu) k_2(\tau, u) ds + k_1(t, \tau) k_2(\tau, u). \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение по τ от a до b и вводя обозначение

$$\int_a^b l(t, \tau, \mu) k_2(\tau, u) d\tau = m(t, u, \mu),$$

получаем с учетом (56)

$$m(t, u, \mu) = \mu \int_a^b \tilde{k}(t, s) m(s, u, \mu) ds + \tilde{k}(t, u).$$

Полученное уравнение совпадает с (59), поэтому имеем интересное нас соотношение

$$\tilde{r}(t, \tau, \mu) = m(t, \tau, \mu) = \int_a^b l(t, s, \mu) k_2(s, \tau) ds. \quad (2.60)$$

Аналогичным способом нетрудно выразить резольвенту ядра (49) через функцию $l(t, \tau, \mu)$. Для этого перепишем уравнение (58) в виде

$$\begin{aligned} k_2(t, s) l(s, \tau, \mu) = \\ = \mu k_2(t, s) \int_a^b \tilde{k}(s, u) l(u, \tau, \mu) du + k_2(t, s) k_1(s, \tau). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Интегрируя это соотношение по s от a до b , получим с учетом (51) и (56)

$$n(t, \tau, \mu) = \mu \int_a^b k(t, s) n(s, \tau, \mu) ds + k(t, \tau), \quad (2.62)$$

где введено обозначение

$$n(t, \tau, \mu) = \int_a^b k_2(t, s) l(s, \tau, \mu) ds. \quad (2.63)$$

Но легко проверить, что уравнение (62) совпадает по виду с уравнением резольвенты (12) для ядра (51). Поэтому имеем

$$r(t, \tau, \mu) = \int_a^b k_2(t, s) l(s, \tau, \mu) ds. \quad (2.64)$$

Используя полученные соотношения, нетрудно написать необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (47) в том случае, когда $\mu = \mu_0$ — характеристическое значение параметра. Так как уравнения (47) и (50) эквивалентны, то условия разрешимости в соответствии с (50) и (26) можно записать в виде

$$\int_a^b \bar{z}_i(\tau) g(\tau) d\tau = 0, \quad (2.65)$$

где $z_i(t)$ — нетривиальные решения уравнения

$$z(t) = \mu_0 \int_a^b \tilde{k}(s, t) z(s) ds. \quad (2.66)$$

Все изложенное выше относилось к тому случаю, когда параметр μ входит в качестве множителя в уравнение (1). В дальнейшем нам придется сталкиваться также с уравнениями, ядра которых зависят от параметра более сложным образом. Изложим, следуя [84], некоторые сведения об интегральных уравнениях Фредгольма II рода, ядра которых аналитически зависят от параметра.

В общем случае такое уравнение имеет вид

$$y(t) = \int_a^b k(t, \tau, \lambda) y(\tau) d\tau + f(t), \quad (2.67)$$

где ядро $k(t, \tau, \lambda)$ является в некоторой области S аналитической функцией λ , т. е. разлагается при любых t и τ в ряд по степеням λ , который сходится при всех значениях $\lambda \in S$. Относительно зависимости ядра от аргументов t и τ и функций $f(t)$ и $y(t)$ от t будем делать те же предположения, что и ранее.

Вводя вспомогательный параметр μ , рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = \mu \int_a^b k(t, \tau, \lambda) y(\tau) d\tau + f(t), \quad (2.68)$$

которое переходит в (67) при $\mu = 1$. При каждом фиксированном λ и правильном значении μ уравнение (68) имеет решение вида (11):

$$y(t) = \mu \int_a^b r(t, \tau, \lambda, \mu) f(\tau) d\tau + f(t), \quad (2.69)$$

где, по аналогии с (14), резольвента равна

$$r(t, \tau, \lambda, \mu) = \frac{d(t, \tau, \lambda, \mu)}{d(\lambda, \mu)} = \frac{k(t, \tau, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n(t, \tau, \lambda)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n(\lambda)} \quad (2.70)$$

Для того чтобы получить решение исходного уравнения (67), следует в (69) и (70) положить $\mu = 1$.

При этом возможны два случая: 1) $d(\lambda, 1) \equiv 0$ и 2) $d(\lambda, 1)$ не равно тождественно нулю.

Первый случай мы изучать не будем, так как он в рассматриваемых ниже задачах встречаться не будет. Во втором случае свойства уравнения (67) во многом аналогичны свойствам уравнения (1). Перечислим некоторые из этих свойств. Все они имеют место при λ , принадлежащем области C .

А) Функция

$$\begin{aligned} r(t, \tau, \lambda) &= r(t, \tau, \lambda, 1) = \frac{d(t, \tau, \lambda, 1)}{d(\lambda, 1)} = \\ &= \frac{k(t, \tau, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} d_n(t, \tau, \lambda)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} d_n(\lambda)} \end{aligned} \quad (2.71)$$

является мероморфной функцией параметра λ во всей области C , т. е. все особые точки функции $r(t, \tau, \lambda)$ в области C являются полюсами.

Б) Если λ не является корнем уравнения

$$d(\lambda) = d(\lambda, 1) = 0, \quad (2.72)$$

то уравнение (67) при любом свободном члене имеет единственное решение

$$y(t) = \int_a^b r(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) d\tau + f(t). \quad (2.73)$$

Значения λ , не являющиеся корнями уравнения (72), будем называть правильными.

В) Значения $\lambda = \lambda_0$, являющиеся корнями уравнения (72), будем называть характеристическими. Если $\lambda = \lambda_0$ — характеристическое значение параметра, то однородное уравнение

$$z(t) = \int_a^b k(t, \tau, \lambda_0) z(\tau) d\tau \quad (2.74)$$

имеет ненулевые решения.

При этом любое характеристическое число является полюсом резольвенты (71). Следовательно, характеристические числа можно также определять как полюсы резольвенты (71).

Условия существования решений уравнения (67) при характеристических значениях параметра λ рассматриваются, как и выше.

Г) Если в области C [53]

$$\int_a^b |k(t, \tau, \lambda)|^2 d\tau \leq \frac{1}{b-a}, \quad (2.75)$$

то при всех $\lambda \in C$ резольвента $r(t, \tau, \lambda)$ является аналитической функцией λ .

Огметим также, что при рассмотрении уравнений вида (27) и (47) удобнее пользоваться не резольвентами соответствующих ядер, а функциями $l(t, \tau, \lambda)$, через которые решения выражаются более простым способом. Кроме того, как показывается ниже, функции $l(t, \tau, \lambda)$ тесно связаны с импульсно-частотными характеристиками замкнутых фильтрующих периодических систем.

§ 3. Фильтрующие линейные периодические системы с обратной связью

Пусть имеем разомкнутую линейную периодическую систему

$$y = W(p, t)x, \quad W(p, t) = W(p, t + T), \quad (3.1)$$

обладающую фильтрующими свойствами в смысле § 1 этой главы. Если охватить систему (1) жесткой обратной связью с коэффициентом μ , то придем к системе, описываемой уравнениями

$$y = W(p, t)z, \quad z = \mu y + x. \quad (3.2)$$

Если

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} x_n(t), & x_n(t) &= x_n(t + T), \\ y(t) &= e^{\lambda t} y_n(t), & y_n(t) &= y_n(t + T), \\ z(t) &= e^{\lambda t} z_n(t), & z_n(t) &= z_n(t + T), \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

то для определения функции $y_n(t)$ в соответствии с (II. 6.17) имеем

$$y_n(t) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) z_n(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

что приводит к интегральному уравнению

$$y_n(t) = \mu \int_0^T k(t, \tau, \lambda) y_n(\tau) d\tau + \int_0^T k(t, \tau, \lambda) x_n(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

ядро которого

$$k(t, \tau, \lambda) = \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) \quad (3.6)$$

совпадает с СИЧХ разомкнутой системы (1) и является функцией параметра λ . Если ядро $k(t, \tau, \lambda)$ при каждом неособом λ удовлетворяет условию (2.3), то уравнение (5) является уравнением Фредгольма II рода и к нему применимы все общие положения § 2 этой главы.

Но из равенства (6) и (2.3) следует, что при каждом неособом λ

$$\begin{aligned} \int_0^T |k(t, \tau, \lambda)|^2 d\tau &= \int_0^T |\varphi(T, \lambda, t, t - \tau)|^2 d\tau = \\ &= \int_0^T |\varphi(T, \lambda, t, \tau)|^2 d\tau \leq A(\lambda). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сравнивая эти выражения с (1.3), получаем, что в рассматриваемом случае условия (7) эквивалентны требованию наличия у разомкнутой системы фильтрующих свойств.

Отсюда приходим к важному выводу о том, что если разомкнутая система (1) обладает свойствами фильтра, то соответствующее ей уравнение (5) будет уравнением Фредгольма со всеми вытекающими отсюда следствиями.

Заметим теперь, что интегральное уравнение (5) имеет вид (2.17), поэтому его решение может быть в общем случае представлено в виде (2.19) (при фиксированном μ):

$$y_n(t) = \int_0^T r(t, \tau, \lambda) x_n(\tau) d\tau, \quad (3.8)$$

где $r(t, \tau, \lambda)$ — резольвента ядра (6).

С другой стороны, поскольку уравнения (2) определяют линейную периодическую систему, то из (3) следует, что

$$y_n(t) = \int_0^T \varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) x_n(\tau) d\tau, \quad (3.9)$$

где $\varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau)$ — СИЧХ замкнутой системы (2).

Сравнивая (8) и (9), получаем, что

$$\varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) = r(t, \tau, \lambda), \quad (3.10)$$

т. е. СИЧХ замкнутой системы (2) совпадает с резольвентой ядра, равного СИЧХ разомкнутой системы.

Но, как указывалось в предыдущем параграфе, если ядро интегрального уравнения удовлетворяет условию (1.3), то аналогичному условию удовлетворяет его резольвента. То есть при каждом λ , не являющемся особой точкой функции $\varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau)$, существует интеграл

$$J_c(p, t) = \int_0^T |r(t, \tau, \lambda)|^2 d\tau = \int_0^T |\varphi_c(T, \lambda, t, \tau)|^2 d\tau. \quad (3.11)$$

Это равенство свидетельствует о том, что замкнутая система является фильтрующей. Таким образом, охват фильтрующей системы жесткой обратной связью снова приводит к фильтрующей системе.

Используя общие уравнения резольвенты (2.12), (2.13), можно получить два интегральных уравнения, определяющих СИЧХ замкнутой системы (2) через СИЧХ разомкнутой системы (1). Из (2.12), (2.13), используя (6) и (10), сразу получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \mu \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - q) \varphi_c(T, \lambda, q, q - \tau) dq + \varphi(T, \lambda, t, t - \tau), \\ \varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \mu \int_0^T \varphi(T, \lambda, q, q - \tau) \varphi_c(T, \lambda, t, t - q) dq + \varphi(T, \lambda, t, t - \tau). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Первое из этих уравнений является частным случаем (II.7.18). Интегрируя это уравнение по τ от 0 до T и учитывая (II.6.23), получим интегральное уравнение для передаточной функции замкнутой системы:

$$W_c(\lambda, t) = \mu \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t-q) W_c(\lambda, q) dq + W(\lambda, t). \quad (3.13)$$

Аналогичным образом, интегрируя по τ второе уравнение (12), получим взаимное соотношение, часто являющееся полезным в приложениях:

$$W_c(\lambda, t) = \mu \int_0^T \varphi_c(T, \lambda, t, t-q) W(\lambda, q) dq + W(\lambda, t). \quad (3.14)$$

Еще одно выражение для передаточной функции замкнутой системы можно получить, полагая в (9)

$$x_n(t) = 1, \quad y_n(t) = W(\lambda, t), \quad (3.15)$$

после чего сразу получаем (II.6.23):

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \varphi_c(T, \lambda, t, t-q) dq. \quad (3.16)$$

Аналогичным образом можно построить общие соотношения для фильтрующих систем более сложной структуры при произвольных входах и выходах.

При этом следует помнить только, что все соотношения § 2 верны в общем случае лишь в предположении о наличии фильтрующих свойств, когда соответствующие уравнения превращаются в уравнения Фредгольма.

Пусть, например, имеем систему более общую, чем (2):

$$\left. \begin{aligned} y &= W_1(p, t) z, \quad z = \mu W_2(p, t) y + x, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t+T), \quad i=1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Предполагая выполненными соотношения (3), для определения СИЧХ системы получаем интегральное уравнение, которое является частным случаем уравнения (2.47). При этом функция $l(t, \tau, \mu)$, фигурирующая в (2.53), будет являться СИЧХ рассматриваемой системы. Уравнение

(2.58) будет уравнением, определяющим СИЧХ. Совершенно аналогично легко убедиться, что если в (17) $W_2(p, t) = a(t)$, $a(t) = a(t + T)$, то соответствующее уравнение для вынужденных колебаний (3) сведется к уравнению вида (2.27) при $\mu = 1$.

Мы, однако, в дальнейшем ограничимся рассмотрением замкнутых систем вида (2), так как это приводит к наиболее простым по форме соотношениям. Пересчет же полученных результатов относительно произвольных входов и выходов может быть осуществлен с помощью общих соотношений гл. II и принципиальных трудностей не представляет.

Из того факта, что передаточная функция $W_c(p, t)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма, а также из общих свойств ядра этого уравнения, определяемых свойствами СИЧХ (см. § 2 этой главы, § 6 гл. II), можно сделать ряд важных общих заключений, которые приводятся без доказательства.

1. Передаточная функция замкнутой системы (2) при наличии фильтрующих свойств разомкнутой системы всегда существует и единственна.

2. Если функция $g(t, \tau)$ (II. 4.23), соответствующая разомкнутой системе (1), удовлетворяет условию

$$|g(t, \tau)| < ke^{\alpha t}, \quad (3.18)$$

где k и α — произвольные постоянные, то

а) разомкнутая система (1) и замкнутая система (2) являются фильтрующими;

б) функция $g_c(t, \tau)$, соответствующая замкнутой системе (2), удовлетворяет неравенству, аналогичному (18):

$$|g_c(t, \tau)| < k_1 e^{\alpha_1 t}; \quad (3.19)$$

в) передаточная функция $W_c(p, t)$ является аналитической функцией p при $\operatorname{Re} p > \alpha_1$ и связана с функцией $g_c(t, \tau)$ соотношением (II. 4.23).

Утверждения б) и в) имеют принципиальное значение. Дело в том, что в общем случае мы не можем утверждать, что передаточная функция замкнутой линейной периодической системы, определяемая уравнением (II. 5.21), существует. Если же такое решение существует, то еще нет никакой гарантии в том, что получен-

ное из (II.5.21) решение является, как функция аргумента p , преобразованием Лапласа. То есть в общем случае нет гарантии того, что получаемая из решения уравнения (II.5.21) функция $W(p, t)$ связана с весовой функцией формулой (II.4.23). Из утверждений б) и в) следует, что в случае (18) такого положения быть не может, решение уравнения (13) действительно является передаточной функцией замкнутой системы (2).

Займемся теперь вопросом о фильтрующих свойствах систем, заданных не передаточными функциями, а уравнениями вида (II.7.20) или (II.7.27). Мы выделим достаточно общий класс таких систем, обладающих фильтрующими свойствами.

Пусть исходная система описывается уравнением

$$a(p, t) y = b(p, t) x. \quad (3.20)$$

Предположим, что существует функция $d(p)$ такая, что передаточные функции $W_1(p, t)$ и $W_2(p, t)$, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} W_1(p, t) &= \frac{1}{d(p)} \circ [d(p) - a(p, t)], \\ W_2(p, t) &= \frac{1}{d(p)} \circ b(p, t), \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

соответствуют фильтрующим системам. Тогда система (20) является фильтрующей.

Доказательство этого утверждения почти очевидно, так как, переписав уравнение (20) в виде

$$d(p) y = [d(p) - a(p, t)] y + b(p, t) x,$$

можно свести его к следующему:

$$y = W_1(p, t) y + W_2(p, t) x, \quad (3.22)$$

откуда, с учетом свойств $W_1(p, t)$ и $W_2(p, t)$, и вытекает, что система (22) и, следовательно, (20) — фильтрующая.

Пример 3.1. Используя приведенное утверждение, легко доказать, что система, описываемая уравнением (II.5.6), является фильтрующей при $n > m$, $a_0(t) = 1$, так как в этом случае в качестве функции $d(p)$ можно взять полином p^n .

Для ряда задач важен вопрос о свойствах передаточной функции $W_c(\lambda, t)$ замкнутой системы, как функции

комплексного переменного λ . В общем случае эта зависимость может быть весьма сложной. Мы выделим, однако, достаточно общий класс систем, для которых передаточная функция будет являться мероморфной [48] функцией на всей комплексной плоскости, т. е. не будет иметь никаких особых точек, кроме полюсов, не зависящих от t . Как следует из § 2, это, в частности, будет иметь место, если удастся построить для определения передаточной функции интегральное уравнение, ядро которого будет целой, т. е. аналитической, функцией параметра λ в любой конечной части комплексной плоскости. Ниже выделяется один случай, когда такое уравнение удастся построить.

Докажем следующее утверждение. Пусть в уравнении (20) $a(p, t)$, $b(p, t)$ — целые функции параметра p . Пусть существует полином $d(p)$, $d(ki\omega) \neq 0$, такой, что система с передаточной функцией

$$\tilde{W}(p, \lambda, t) = 1 - \frac{a(p + \lambda, t)}{d(p)} \quad (3.23)$$

является фильтрующей при любом конечном λ , причем соответствующая передаточной функции $\tilde{W}(p, \lambda, t)$ ИЧХ

$$\tilde{\varphi}(T, \lambda, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{W}(ki\omega, \lambda, t) e^{ki\omega(t-\tau)} \quad (3.24)$$

также является целой функцией параметра λ . Тогда передаточная функция $W(\lambda, t)$ и СИЧХ $\varphi(T, \lambda, t, t - \tau)$ системы (20) являются мероморфными функциями параметра λ .

Для доказательства сформулированного утверждения предположим, что x и y в (20) имеют вид (3). Тогда из (20) имеем

$$a(p + \lambda, t) y_{\Pi} = u_{\Pi}, \quad u_{\Pi} = b(p + \lambda, t) x_{\Pi} \quad (3.25)$$

или, что эквивалентно,

$$\left. \begin{aligned} d(p) y_{\Pi} &= c(p, \lambda, t) y_{\Pi} + u_{\Pi}, \\ c(p, \lambda, t) &= d(p) - a(p + \lambda, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Положим теперь

$$v_{\Pi} = c(p, \lambda, t) y_{\Pi}. \quad (3.27)$$

Тогда из (26) имеем

$$y_{\Pi} = \frac{1}{d(p)} (v_{\Pi} + u_{\Pi}). \quad (3.28)$$

Подставляя это выражение в (27), получим

$$v_{\Pi} = \left[c(p, \lambda, t) \circ \frac{1}{d(p)} \right] (v_{\Pi} + u_{\Pi}). \quad (3.29)$$

Но, в соответствии с (26), (II. 6.33) и (23),

$$c(p, \lambda, t) \circ \frac{1}{d(p)} = \frac{c(p, \lambda, t)}{d(p)} = \tilde{W}(p, \lambda, t), \quad (3.30)$$

т. е. уравнение (29) сводится к следующему:

$$v_{\Pi} = \tilde{W}(p, \lambda, t) (v_{\Pi} + u_{\Pi}). \quad (3.31)$$

Это уравнение по форме совпадает с (2) при $\mu = 1$.

Соответствующие системе (31) интегральные уравнения (12) будут, по предположению, иметь ядро, являющееся целой функцией λ , так как оно совпадает с ИЧХ $\tilde{\varphi}(T, \lambda, t, t - \tau)$. Тогда, в соответствии со сказанным в § 2, СИЧХ $\varphi_{vu}(T, \lambda, t, t - \tau)$ системы (31) будет мероморфной функцией λ . Но тогда мероморфной будет, в соответствии с (16), и передаточная функция системы (31), которую мы обозначим через $W_{vu}(\lambda, t)$.

Поскольку из (31) следует, что

$$v_{\Pi} = W_{vu}(\lambda, t) u_{\Pi}, \quad (3.32)$$

то из (28), (25) получаем передаточную функцию от x к y :

$$W(\lambda, t) = \int_0^T \varphi_d(T, t - \tau) [W_{vx}(\lambda, \tau) + b(\lambda, \tau)] d\tau, \quad (3.33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_{vx}(\lambda, t) &= W_{vu}(\lambda, t) \circ b(\lambda, t), \\ \varphi_d(T, t - \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ki\omega(t-\tau)}}{d(ki\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Из мероморфности φ_{vu} и W_{vu} по λ следует в силу (33), что такими же являются передаточная функция и СИЧХ системы (20).

Пример 3.2. Пусть в уравнении (20)

$$\left. \begin{aligned} a(p, t) &= p + a_1(t) e^{-p\tau}, \quad \tau \geq 0, \\ a_1(t) &= a_1(t - T), \quad b(p, t) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

причем функция $a_1(t)$ ограничена. Если положить $d(p) = p + \alpha$, то из (23) получим

$$\tilde{W}(p, \lambda, t) = \frac{p + \alpha - a(p + \lambda, t)}{p + \alpha} = \frac{\alpha - \lambda}{p + \alpha} - a_1(t) e^{-\lambda\tau} \frac{e^{-p\tau}}{p + \alpha}. \quad (3.36)$$

ИЧХ, соответствующая передаточной функции (36), имеет вид

$$\tilde{\varphi}(T, \lambda, t, t - \tau) = (\alpha - \lambda) \varphi_1(T, t - \tau) - a_1(t) e^{-\lambda\tau} \varphi_2(T, t - \tau),$$

где φ_1 и φ_2 — обыкновенные функции, каждая из которых удовлетворяет условию фильтра. Кроме того, очевидно, функция $\tilde{\varphi}$ является целой функцией параметра λ . Отсюда вытекает, что все требования сформулированной выше теоремы выполнены. Поэтому можно утверждать, что уравнения (20), (25) соответствуют системе, СИЧХ и передаточная функции которой мероморфны относительно параметра λ .

Совершенно аналогично можно исследовать тот случай, когда

$$\left. \begin{aligned} a(p, t) &= p^n + a_1(t) e^{-p\tau_1} + \dots + a_n(t) e^{-p\tau_n}, \\ a_i(t) &= a_i(t + T), \quad \tau_i \geq 0, \\ b(p, t) &= b_0(t) p^m e^{-p\nu_0} + \dots + b_m(t) e^{-p\nu_m}, \\ b_i(t) &= b_i(t + T), \quad \nu_i \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

где функция a_i, b_i ограничены, если в качестве $d(p)$ взять многочлен $p^n + \alpha$. При этом окажется, что СИЧХ и передаточная функция мероморфны по λ .

Следует отметить, что уравнение (31), использованное при доказательстве теоремы, не всегда удобно для практических вычислений. Во многих случаях оказывается более удобным использовать другие эквивалентные уравнения, которые приводят к интегральным уравнениям с ядрами, не являющимися целыми функциями λ . Тем не менее, если известно, что исходная система может быть приведена к уравнению вида (20), где $a(p, t)$,

$b(p, t)$ — целые функции p , причем $a(p, t)$ удовлетворяет условиям доказанной теоремы, то можно быть уверенным в том, что СИЧХ и передаточная функция системы мероморфны по λ , так как очевидно, что это свойство не зависит от конкретной формы интегрального уравнения, к которому сведено исследование задачи.

Пример 3.3. Пусть имеем замкнутую систему вида

$$y = W(p)z, \quad z = a(t)y + x, \quad (3.38)$$

где передаточная функция $W(p)$ имеет вид (II.3.51). Здесь передаточная функция не является целой по p . Тем не менее исходную систему можно записать в виде

$$d(p)y = m(p)[a(t)y + x].$$

Если положить здесь $y = m(p)v$, то получим

$$[d(p) - a(t)m(p)]v = x. \quad (3.39)$$

В результате получилось уравнение вида (20), причем условия доказанной теоремы, очевидно, выполнены. Поэтому СИЧХ и передаточная функция системы (38) мероморфны по λ . Нетрудно также показать, что система (38) — фильтрующая.

§ 4. Практический способ вычисления передаточной функции замкнутой системы

В принципе для определения передаточной функции замкнутой фильтрующей системы из соответствующего интегрального уравнения можно использовать разнообразные приемы, использующие общие методы решения уравнений Фредгольма II рода. При этом в рассматриваемом случае решение задачи связано с дополнительными трудностями, обусловленными тем, что из соответствующего уравнения требуется найти не конкретную числовую функцию, а функцию t и параметра λ . Это обстоятельство затрудняет применение к данной задаче методов численного решения уравнений Фредгольма II рода.

Различные приближенные методы решения, пригодные и в рассматриваемом случае, изложены в работе [75].

Здесь будет приведен только один способ приближенного определения передаточной функции, использующий специфику интегрального уравнения (3.13):

$$W_c(\lambda, t) = \mu \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) W_c(\lambda, \tau) d\tau + W(\lambda, t), \quad (4.1)$$

ядро которого связано с передаточной функцией разомкнутой системы $W(\lambda, t)$ соотношением

$$\varphi(T, \lambda, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)}. \quad (4.2)$$

Пусть каноническое представление передаточной функции замкнутой системы $W_c(\lambda, t)$ имеет вид

$$W_c(\lambda, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{ck}(\lambda) e^{ki\omega t}, \quad (4.3)$$

где, как обычно,

$$W_{ck}(\lambda) = \frac{1}{T} \int_0^T W(\lambda, \tau) e^{-ki\omega\tau} d\tau. \quad (4.4)$$

Покажем, что от интегрального уравнения (1) можно перейти к бесконечной системе уравнений относительно функций $W_{ck}(\lambda)$. Для этого заметим, что если подставить выражение (2) в интегральное уравнение (1), то, интегрируя почленно по τ , получим с учетом (4)

$$W_c(\lambda, t) = \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) W_{ck}(\lambda) e^{ki\omega t} + W(\lambda, t). \quad (4.5)$$

Подставляя это выражение снова в исходное уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega t} W_{ck}(\lambda) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega t} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ki\omega\tau} \times \\ \times \left[\mu \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(\lambda + si\omega, \tau) W_{cs}(\lambda) e^{si\omega\tau} + W(\lambda, \tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Предполагая функции $W_k(\lambda, t) = W(\lambda + ki\omega, t)e^{ki\omega t}$ линейно независимыми и приравнявая коэффициенты при W_k в левой и правой частях последнего равенства, найдем

$$W_{ck}(\lambda) = \mu \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_{cl}(\lambda) \psi_{lk}(\lambda) + W_k(\lambda), \quad (4.7)$$

где

$$\psi_{lk}(\lambda) = \frac{1}{T} \int_0^T W(\lambda + li\omega, \tau) e^{(l-k)i\omega\tau} d\tau, \quad (4.8)$$

а $W_k(\lambda)$ — коэффициенты канонического разложения передаточной функции разомкнутой системы

$$\begin{aligned} W(\lambda, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(\lambda) e^{ki\omega t}, \\ W_k(\lambda) &= \frac{1}{T} \int_0^T W(\lambda, \tau) e^{-ki\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При этом с учетом выражения для $W_k(\lambda)$ выражение для коэффициентов $\psi_{lk}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\psi_{lk}(\lambda) = W_{k-l}(\lambda + li\omega). \quad (4.10)$$

С учетом последнего соотношения систему (7) можно представить в виде

$$W_{ck}(\lambda) = \mu \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_{cl}(\lambda) W_{k-l}(\lambda + li\omega) + W_k(\lambda). \quad (4.11)$$

В общем случае точное решение системы (11) не проще решения исходного интегрального уравнения (1). Однако если приближенно заменить систему (11) конечной системой уравнений, то коэффициенты $W_{ck}(\lambda)$ могут быть получены элементарно.

Нетрудно показать, что такой приближенный способ решения эквивалентен замене ядра (2) соответствующим вырожденным ядром. Действительно, рассмотрим вместо (1) приближенное интегральное уравнение

$$\tilde{W}_c(\lambda, t) = \mu \int_0^T \tilde{\varphi}(T, \lambda, t, t - \tau) \tilde{W}_c(\lambda, \tau) d\tau + W(\lambda, t), \quad (4.12)$$

где

$$\tilde{\Phi}(T, \lambda, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n W(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)}, \quad (4.13)$$

n — некоторое целое число. Повторяя дословно выкладки, приводящие к системе (11), получим, что

$$\tilde{W}_c(\lambda, t) = \mu \sum_{k=-n}^n W(\lambda + ki\omega, t) \tilde{W}_{ck}(\lambda) e^{ki\omega t} + W(\lambda, t), \quad (4.14)$$

причем коэффициенты $\tilde{W}_{ck}(\lambda)$ удовлетворяют конечной системе линейных уравнений

$$\tilde{W}_{ck}(\lambda) = \mu \sum_{l=-n}^n W_{k-l}(\lambda + li\omega) \tilde{W}_{cl}(\lambda) + W_k(\lambda), \quad (4.15)$$

$$-n \leq k \leq n.$$

Если найти из (15) коэффициенты $\tilde{W}_{ck}(\lambda)$ и подставить их в (14), то получим приближенное выражение для передаточной функции.

Простейшим вариантом изложенного метода является тот случай, когда в сумме (13) сохраняется только одно слагаемое, соответствующее $k = 0$. В этом случае из (14) имеем

$$\tilde{W}_c(\lambda, t) = \mu W(\lambda, t) \tilde{W}_{c0}(\lambda) + W(\lambda, t), \quad (4.16)$$

причем по (15)

$$\tilde{W}_{c0}(\lambda) = \mu W_0(\lambda) \tilde{W}_{c0}(\lambda) + W_0(\lambda), \quad (4.17)$$

т. е.

$$\tilde{W}_{c0}(\lambda) = \frac{W_0(\lambda)}{1 - \mu W_0(\lambda)}. \quad (4.18)$$

Подставляя это выражение в (16), получаем приближенное выражение передаточной функции замкнутой системы:

$$\tilde{W}_c(\lambda, t) = \frac{W(\lambda, t)}{1 - \mu W_0(\lambda)} \quad (4.19)$$

или, с учетом (9),

$$\tilde{W}_c(\lambda, t) = \frac{W(\lambda, t)}{1 - \frac{\mu}{T} \int_0^T W(\lambda, \tau) d\tau}. \quad (4.20)$$

Сохраняя в (14) большее число слагаемых, можно получить и более точные приближенные решения.

Следует отметить, что изложенный подход близок по идее к методу Хилла, различные варианты которого широко применяются в теории линейных систем с периодически изменяющимися параметрами [13, 14, 90, 91]. Следует отметить, однако, что в традиционных вариантах метода Хилла решение ищется обычно в виде конечной тригонометрической суммы, т. е. в виде конечной суммы синусов и косинусов. В данном же случае решение ищется в виде ряда по функциям

$$W_k(\lambda, t) = W(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega t}. \quad (4.21)$$

В ряде случаев такой подход позволяет более точно учесть характер реальных процессов, происходящих в замкнутой системе.

Пример 4.1. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\left. \begin{aligned} y &= a(t)z, \quad z = W(p)(x + v), \quad v = ky, \\ a(t) &= a(t + T), \quad k = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

В данном случае передаточная функция разомкнутой системы от x к v равна

$$W(\lambda, t) = a(t) kW(\lambda) \quad (4.23)$$

и приближенное выражение передаточной функции замкнутой системы от x к y , получающееся из (20), равно

$$\tilde{W}_c(\lambda, t) = \frac{a(t) kW(\lambda)}{1 - ka_0 W(\lambda)}, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(\tau) d\tau. \quad (4.24)$$

При малых значениях k влияние обратной связи мало. В то же время форма сигнала на выходе может быть весьма сложной. Очевидно, это обстоятельство отражается формулой (24).

§ 5. Устойчивость и резонансные явления в замкнутых фильтрующих системах

В настоящем параграфе предполагается, что разомкнутая система (3.1) удовлетворяет условию (3.7) и, кроме того, замкнутая система (3.2) может быть сведена к уравнениям вида (II.7.20) или (II.7.27), где

a, b — целые функции p . При чем СИЧХ и передаточная функция замкнутой системы (3.2) являются мероморфными функциями параметра λ .

Если при этом передаточная функция замкнутой системы удовлетворяет остальным условиям § 9 гл. II, то замкнутая система будет устойчива, если полюсы λ_k передаточной функции удовлетворяют условию (II. 9.22):

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq \beta < 0. \quad (5.1)$$

Но если учесть связь между СИЧХ и передаточной функцией замкнутой системы

$$\varphi_c(T, \lambda, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_c(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega\tau}, \quad (5.2)$$

то видно, что если $\lambda = \lambda_k$ — полюс передаточной функции, то одновременно λ_k — полюс СИЧХ.

Обратно, если $\lambda = \tilde{\lambda}_k$ — полюс $\varphi_c(T, \lambda, t, \tau)$, то существует целое число s такое, что $\tilde{\lambda}_k + si\omega$ — полюс передаточной функции. Поэтому условие устойчивости (2) можно представить в виде

$$\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_k \leq \alpha < 0, \quad (5.3)$$

где $\tilde{\lambda}_k$ — полюсы функции (2).

С другой стороны, $\varphi_c(T, \lambda, t, t - \tau)$ является резольвентой ядра, равного СИЧХ, соответствующей передаточной функции $W(\lambda, t)$. Поэтому все числа $\tilde{\lambda}_k$ могут быть определены как корни уравнения (2.71):

$$d(\mu, \lambda) = 0, \quad (5.4)$$

где $d(\mu, \lambda)$ — соответствующий знаменатель Фредгольма.

Но легко убедиться, полагая в (3.2) или (3.5) $x_{\Pi} = 0$, что корни уравнения (4) — это те значения λ , при которых изучаемая система в отсутствие внешнего возбуждения имеет решения вида

$$y = e^{\tilde{\lambda}_k t} y_{\Pi}(t), \quad y_{\Pi}(t) = y_{\Pi}(t + T). \quad (5.5)$$

Вспоминая определение § 8 гл. II, мы приходим к выводу, что при сделанных предположениях множе-

ство полюсов СИЧХ замкнутой системы (3.2) совпадает с множеством ее характеристических показателей, и в рассматриваемом случае условие устойчивости (1) может быть представлено в виде

$$\operatorname{Re} \lambda_{ks} \leq \alpha < 0, \quad (5.6)$$

где λ_{ks} — характеристические показатели замкнутой системы.

Прежде чем перейти к фактическому построению уравнения, определяющего характеристические показатели замкнутой системы, отметим одно важное обстоятельство.

В общем случае непосредственно по виду передаточной функции разомкнутой системы (3.1) трудно установить, удовлетворяет ли передаточная функция замкнутой системы условиям, при которых неравенства (6) гарантируют устойчивость системы, и в каждом конкретном случае этот вопрос требует дополнительного исследования. Однако можно выделить один важный класс систем, когда условия (1) или (6) гарантируют устойчивость, — это системы, описываемые уравнениями вида (II.5.6) при $a_0(t) = 1$. Доказательство этого факта следует из результатов работы [38].

Уравнение (4) или эквивалентное ему в дальнейшем будем называть характеристическим. Использовать уравнение (3.20) для фактического построения характеристического уравнения с вычислительной точки зрения неудобно. Поэтому будем предполагать, что изучаемая система соответствующим выбором входа и выхода приведена к виду (3.2). При этом уравнение (4) может быть заменено эквивалентным:

$$\tilde{d}(\mu, \lambda) = 0, \quad (5.7)$$

где $\tilde{d}(\mu, \lambda)$ — знаменатель Фредгольма ядра (3.6). Для ядра $k(t, \tau, \lambda)$, зависящего, кроме аргументов t, τ , от параметра λ , формула (4) принимает вид

$$\tilde{d}(\mu, \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n(\lambda), \quad (5.8)$$

Где в нашем случае в соответствии с (3.2) роль пара-

метра μ играет коэффициент обратной связи системы. Входящие в (8) коэффициенты $d_n(\lambda)$ могут быть определены через ядро $k(t, \tau, \lambda)$ по формулам [64]

$$d_n(\lambda) = \frac{1}{T_n} \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \det \begin{vmatrix} k(t_1, t_1, \lambda) & \dots & k(t_1, t_n, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t_1, \lambda) & \dots & k(t_n, t_n, \lambda) \end{vmatrix} \times \\ \times dt_1 \dots dt_n. \quad (5.9)$$

Подставляя сюда выражение ядра $k(t, \tau, \lambda)$, находим

$$d_n(\lambda) = \frac{1}{T_n} \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \det \begin{vmatrix} \varphi(T, \lambda, t_1, 0) & \dots & \varphi(T, \lambda, t_1, t_1 - t_2) \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(T, \lambda, t_n, t_n - t_1) & \dots & \varphi(T, \lambda, t_n, t_n - t_2) \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \quad (5.10)$$

Таким образом, характеристическое уравнение замкнутой фильтрующей системы (3.2) при сделанных предположениях имеет вид

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n(\lambda) = 0, \quad (5.11)$$

где коэффициенты $d_n(\lambda)$ определяются через СИЧХ разомкнутой системы по формулам (10). При практических расчетах в уравнении (11) сохраняется конечное число слагаемых.

Приведем несколько важных свойств характеристического уравнения (11).

1. Знаменатель Фредгольма $\tilde{d}(\mu, \lambda)$ и, следовательно, левая часть характеристического уравнения (11) периодичны по λ с чисто мнимым периодом $i\omega$, т. е.

$$\tilde{d}(\mu, \lambda) = \tilde{d}(\mu, \lambda + i\omega). \quad (5.12)$$

Для доказательства этого факта достаточно установить периодичность по λ с периодом $i\omega$ коэффициентов $d_n(\lambda)$. Но если рассмотреть определитель, стоящий в подынтегральном выражении в (10):

$$\Delta_n(\lambda) = \det | \varphi(T, \lambda, t_i, t_i - t_j) |, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

то, заменяя λ на $\lambda + i\omega$, получим

$$\Delta_n(\lambda + i\omega) = \det | \varphi(T, \lambda + i\omega, t_i, t_i - t_j) |.$$

Если использовать формулу (II.6.49), то последнее выражение примет вид

$$\Delta_n(\lambda + i\omega) = \det | \varphi(T, \lambda, t_i, t_i - t_j) e^{-i\omega(t_i - t_j)} |.$$

Вынося из k -й строки этого определителя множитель $e^{-i\omega t_k}$, а из каждого столбца множитель $e^{i\omega t_l}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta_n(\lambda + i\omega) = \\ = e^{-i\omega \sum_{k=1}^n t_k} e^{i\omega \sum_{l=1}^n t_l} \det | \varphi(T, \lambda, t_i, t_i - t_j) | = \Delta_n(\lambda). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из (13) и (8) следует (12).

Соотношение (12) имеет важное практическое значение. Оно говорит о том, что фактически при исследовании устойчивости с помощью характеристического уравнения (11) достаточно проверить выполнение условий (6) в любой полосе, параллельной вещественной оси и имеющей ширину $i\omega$. Например, можно полагать, что

$$-\frac{\omega}{2} \leq \operatorname{Im} \lambda < \frac{\omega}{2}. \quad (5.14)$$

Кроме того, из (10) и (II.6.22) вытекает, что фактически $\tilde{d}(\mu, \lambda)$ является функцией переменной

$$z = e^{\lambda T}. \quad (5.15)$$

При переходе к переменной z вместо (7) получим уравнение

$$\tilde{d}\left(\mu, \frac{1}{T} \ln z\right) = 0, \quad (5.16)$$

а условием устойчивости служит

$$|z_p| \leq \beta < 1, \quad (5.17)$$

где z_p — корни уравнения (16).

2. Можно доказать способом, аналогичным приведенному в [75], что как функция параметра λ знаменатель Фредгольма $\tilde{d}(\mu, \lambda)$ обладает еще одним важным свойством.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы (3.1) имеет конечное число полюсов λ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) таких, что $\lambda_k - \lambda_s = m_{ks}i\omega$, где m_{ks} — целое число. Тогда, если кратность полюса λ_k равна L_k и

$$\sum_{k=1}^s L_k = L, \quad (5.18)$$

то $\tilde{d}(\mu, \lambda)$ имеет при $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) полюсы кратности L .

Используя этот факт для некоторых случаев, можно доказать, что мероморфность передаточной функции замкнутой системы вытекает непосредственно из мероморфности СИЧХ разомкнутой системы, не предполагая, что замкнутая система описывается уравнением вида (II.7.20) или (3.20), где a, b — целые функции p .

Изложим еще один приближенный способ построения характеристического уравнения, использующий соображения предыдущего параграфа. Если предположить, что замкнутая система (3.2) в отсутствие внешнего возбуждения имеет решения вида (3.5), то функция $y_{\Pi}(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$y_{\Pi}(t) = \mu \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau \quad (5.19)$$

получающемуся из (3.5) при $x_{\Pi}(t) = 0$. Подставляя в (19) выражение для ядра (1.2) и предполагая, что решение $y_{\Pi}(t)$ имеет вид

$$y_{\Pi}(t) = \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) y_k(\lambda) e^{ki\omega t}, \quad (5.20)$$

где коэффициенты $y_k(\lambda)$ неизвестны, сразу придем к однородной бесконечной системе линейных уравнений, получающейся из (4.17):

$$y_k(\lambda) = \mu \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_{k-l}(\lambda + li\omega) y_l(\lambda). \quad (5.21)$$

Для существования нетривиальных решений этой системы потребуем, чтобы обращался в нуль ее опреде-

литель, что приводит к равенству

$$\det |\delta_{kl} - \mu W_{k-l}(\lambda + li\omega)| = 0, \quad -\infty < k, \quad l < \infty, \quad (5.22)$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & n = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Вычисление бесконечного определителя (22) в общем случае весьма сложно. Если же «вырезать» из (22) конечный определитель, то придем к приближенному характеристическому уравнению

$$\det |\delta_{kl} - \mu W_{k-l}(\lambda + li\omega)| = 0, \quad -n \leq k, \quad l \leq n. \quad (5.23)$$

В простейшем случае, когда $n = 0$, уравнение (23), с учетом (4.9), принимает вид

$$1 - \frac{\mu}{T} \int_0^T W(\lambda, \tau) d\tau = 0, \quad (5.24)$$

что соответствует методу усреднения.

Следует отметить, что в отличие от приближенного характеристического уравнения, получающегося из (11) при замене ряда конечной суммой, левая часть приближенного характеристического уравнения (23) не является периодической функцией λ . Поэтому при его использовании перехода к переменной z (15) невозможен.

Рассмотрим теперь коротко вопрос о резонансных явлениях в замкнутой системе (3.2), сохраняя предположения, сделанные в начале настоящего параграфа.

Будем говорить, что в системе (3.2) имеет место резонанс, если число λ таково, что при некотором выборе функции $x_{\Pi}(t) = x_{\Pi}(t + T)$ в системе (3.2) не существует установившихся колебаний вида (3.3).

Используя установленную связь между полюсами резольвенты уравнения (3.5) и характеристическими показателями системы (3.2), а также общие соотношения и теоремы § 2 этой главы, можно утверждать следующее.

1. Если λ не равно характеристическому показателю системы, то установившиеся колебания системы, имеющие вид (3.2), всегда существуют и определяются единственным образом. Следовательно, при λ , не равном

характеристическому показателю системы, явление резонанса невозможно.

2. Если (при фиксированном μ) λ равно характеристическому показателю замкнутой системы, то имеет место резонанс, так как при этом соответствующее интегральное уравнение (3.5) будет особым.

3. В случае резонанса установившиеся колебания вида (3.3) существуют в том и только том случае, когда выполнено условие вида (2.26), которое в обозначениях § 3 этой главы имеет вид

$$\int_0^T \bar{z}_i(\tau) x_n(\tau) d\tau = 0;$$

при этом функции $z_i(t)$ являются нетривиальными решениями интегрального уравнения, получающегося из (3.5) с помощью соотношений (3.6) и (2.24):

$$z_i(t) = \mu_0 \int_0^T \overline{\varphi(T, \lambda, \tau, \tau - t)} z_i(\tau) d\tau.$$

На возможных способах вычисления функций z_i останавливаться мы не будем.

Отметим также, что соотношения (2.42), (2.43) и (2.65), (2.66) позволяют исследовать резонансные явления в фильтрующих системах более сложной структуры.

ЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ

Вводные замечания

Четвертая глава посвящена изучению линейных периодических импульсных и цифровых систем с позиций общей теории линейных периодических систем.

Традиционно для изучения импульсных систем используется математический аппарат [25, 103] дискретного анализа. Для изучения процессов в непрерывном времени, а также для изучения дискретно-непрерывных систем классические методы не всегда применимы. С этой точки зрения подход, излагаемый в главе, является более универсальным.

Основной идеей главы является математическое описание импульсных и экстраполирующих элементов некоторыми линейными периодическими операторами. Реализация этой идеи позволяет найти передаточные функции и СИЧХ таких элементов. Этому вопросу посвящены § 1 и § 2, после чего выводятся правила построения передаточных функций разомкнутых систем, содержащих импульсные и экстраполирующие элементы. Существенной особенностью таких систем является отсутствие у них фильтрующих свойств в смысле гл. III. Тем не менее, используя специфику задачи, удастся установить ряд общих соотношений для вычисления передаточных функций замкнутых одномерных и многомерных дискретно-непрерывных систем. Эти результаты обсуждаются в § 4 и § 5. Заключительные параграфы главы посвящены методам исследования переходных процессов, а также методам исследования устойчивости в системах рассматриваемого класса.

§ 1. Амплитудно-импульсный элемент как линейный периодический оператор

Настоящая глава посвящена рассмотрению одного важного класса линейных периодических систем, которые не относятся к классу фильтрующих и к

которым, следовательно, неприменима теория, изложенная в предыдущей главе.

Системы, изучаемые в этой главе, отличаются тем, что в них происходят процессы переработки непрерывных сигналов в дискретные и обратно. Системы такого рода обычно носят название *импульсных* или *цифровых* [43, 103].

Среди линейных импульсных систем наиболее распространенными являются такие, которые содержат в своем составе амплитудно-импульсные элементы, реагирующие на равноотстоящие значения входного сигнала. Ниже показывается, что математически действие таких элементов может быть описано некоторым линейным периодическим оператором специального вида.

Наличие таких элементов придает системе особые свойства, которые позволяют применить к ней ряд специальных эффективных методов исследования.

Перейдем теперь к рассмотрению основных понятий.

Как известно [103], *амплитудно-импульсным (АИ) элементом I рода* называют систему, работающую на следующем принципе. Предполагается, что задана некоторая периодическая функция

$$m(t) = m(t + T), \quad (1.1)$$

которую называют *модулируемой*. Входной сигнал $x(t)$ преобразуется в выходной сигнал $y(t)$ по следующему закону:

$$y(t) = x[(n-1)T] m(t), \quad (n-1)T < t < nT, \quad (1.2)$$

где n — целые числа. При этом считается, что входной сигнал в моменты $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) непрерывен.

В некоторых приложениях встречаются случаи, когда сигнал, поступающий на импульсный элемент (1), претерпевает разрывы в моменты $t = kT$. При этом импульсный элемент фиксирует значения $x(kT - 0)$ или $x(kT + 0)$. Все дальнейшее изложение может быть обобщено непосредственно и на такие входные сигналы. Однако для простоты соответствующих формул в этой главе удобнее придерживаться предположения о непрерывности $x(t)$ в точках $t = kT$.

Соотношение (2) сопоставляет любому входному непрерывному в моменты $t = kT$ сигналу $x(t)$ единствен-

ным образом выходной сигнал $y(t)$. Поэтому с математической точки зрения соотношение (2) определяет некоторый оператор

$$y = U_a(x). \quad (1.3)$$

Непосредственно из (2) и (II.1.2) следует, что оператор (3) — линейный. Легко убедиться также, что оператор (3) — периодический. Действительно, если на вход элемента (2) действует сдвинутый сигнал $x(t-T)$, то из (2) и (1) сразу вытекает, что соответствующий выход равен $y(t-T)$. Это говорит о периодичности оператора (2).

Найдем передаточную функцию АИ-элемента, для чего воспользуемся общей формулой (II.1.7). Полагая $x = e^{pt}$, из (2) имеем

$$U_a(e^{pt}) = e^{pnT} m(t), \quad nT < t < (n+1)T. \quad (1.4)$$

Умножая это выражение на e^{-pt} , получаем передаточную функцию АИ-элемента:

$$W_a(p, t) = e^{p(nT-t)} m(t) \quad \text{при} \quad nT < t < (n+1)T. \quad (1.5)$$

Покажем, что функция $W_a(p, t)$ периодична по t с периодом T , т. е.

$$W_a(p, t) = W_a(p, t+T). \quad (1.6)$$

Действительно, при $nT \leq t < (n+1)T$ $t = nT + \varepsilon$, причем $0 \leq \varepsilon < T$. При этом из (5) следует, что

$$W_a(p, t) = e^{-pe} m(nT + \varepsilon) = e^{-pe} m(\varepsilon), \quad nT < t < (n+1)T.$$

Последнее соотношение равносильно тому, что

$$W_a(p, t) = e^{-pt} m(t), \quad 0 \leq t < T, \quad W_a(p, t) = W_a(p, t+T), \quad (1.7)$$

что находится в соответствии с изложенной выше общей теорией. Из полученного выражения (7) следует, что передаточная функция АИ-элемента при каждом фиксированном значении t является целой функцией комплексного переменного p .

Если, в частности, $m(t) = 1$, то АИ-элемент превращается в фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией

$$W_a(p, t) = e^{-pt}, \quad 0 \leq t < T, \quad W_a(p, t) = W_a(p, t+T). \quad (1.8)$$

При этом, если ввести в рассмотрение периодическую функцию

$$\theta(t) = t, \quad 0 \leq t < T, \quad \theta(t) = \theta(t + T), \quad (1.9)$$

то (8) можно переписать в виде

$$W_a(p, t) = e^{-p\theta(t)}. \quad (1.10)$$

Сравнивая это выражение с (II.6.75), приходим к выводу о том, что фиксатор нулевого порядка является частным случаем звена с периодически меняющимся запаздыванием.

Найдем теперь каноническое представление передаточной функции (7), для чего разложим ее в ряд Фурье по t :

$$W_a(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{ak}(p) e^{ki\omega t}, \quad (1.11)$$

где

$$W_{ak}(p) = \frac{1}{T} \int_0^T W_a(p, \tau) e^{-ki\omega \tau} d\tau. \quad (1.12)$$

С учетом (7) имеем

$$W_{ak}(p) = \frac{1}{T} \int_0^T m(\tau) e^{-(p+ki\omega)\tau} d\tau. \quad (1.13)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$W_\phi(p) = \int_0^T m(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (1.14)$$

которую назовем *передаточной функцией формирующего элемента*. Смысл этого термина будет пояснен ниже.

Сравнивая правые части (13) и (14), получаем

$$W_{ak}(p) = \frac{1}{T} W_\phi(p + ki\omega). \quad (1.15)$$

Подставляя это соотношение в (11), получаем каноническое представление передаточной функции в виде

$$W_a(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_\phi(p + ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (1.16)$$

Сравнивая это выражение с (II.3.21), видим, что передаточная функция $W_a(p, t)$ равна СИЧХ стационарного оператора с передаточной функцией (14), т. е. равна СИЧХ формирующего элемента.

Если рассмотреть линейный стационарный оператор вида (II.1.12):

$$y = h_\Phi * x, \quad (1.17)$$

где весовая функция равна

$$h_\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ m(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (1.18)$$

то его передаточная функция будет иметь вид

$$\int_0^\infty h_\Phi(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \int_0^T m(\tau) e^{-p\tau} d\tau = W_\Phi(p). \quad (1.19)$$

Таким образом, элемент с передаточной функцией (14) при входном сигнале $x(t)$ в виде мгновенного импульса на выходе дает импульс вида (18). Этим и объясняется термин «формирующий элемент».

Найдем теперь весовую функцию АИ-элемента (2). Для этого следует в (7) или (16) перейти к обратному преобразованию Лапласа. Так как из (18) и (19) следует, что

$$L^{-1}[W_\Phi(p + kl\omega)] = e^{-kl\omega t} h_\Phi(t), \quad (1.20)$$

то из (16) находим, что при $\xi > 0$

$$g(t, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_a(p, t) e^{p\xi} dp = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{kl\omega(t-\xi)} h_\Phi(\xi). \quad (1.21)$$

Заменяя здесь, в соответствии с (II.4.24), ξ на $t - \tau$, получаем весовую функцию оператора (2):

$$h_a(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ \delta_T(\tau) h_\Phi(t - \tau), & t \geq \tau, \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\delta_T(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{kl\omega\tau}.$$

Если учесть соотношение для $\delta_T(\tau)$ (I.7.23), то выражение для весовой функции (22) можно переписать в виде

$$h_a(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ h_\Phi(t - \tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT), & t \geq \tau. \end{cases} \quad (1.23)$$

В терминах теории обобщенных функций при использовании операции свертки уравнение АИ-элемента (2) может быть записано в виде

$$y = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k i \omega t} [(e^{-k i \omega t} h_\Phi(t)) * x], \quad (1.24)$$

что представляет собой частный случай оператора (II.4.1). При этом, если $x = \delta(t - \tau)$, то по (II.1.19)

$$[e^{-k i \omega t} h_\Phi(t)] * \delta(t - \tau) = e^{-k i \omega(t - \tau)} h_\Phi(t - \tau). \quad (1.25)$$

С учетом этого выражения легко убедиться в том, что выражение (24) при $x = \delta(t - \tau)$ приводится к (22), т. е. обобщенная функция (22) действительно является весовой функцией оператора (24).

Если же положить в (24) $x = e^{pt}$, то, учитывая (II.1.13) и (20)

$$[e^{-k i \omega t} h_\Phi(t)] * e^{pt} = L[e^{-k i \omega t} h_\Phi(t)] e^{pt} = W_\Phi(p + k i \omega) e^{pt}. \quad (1.26)$$

Из (24) и (26) непосредственно следует, что передаточная функция оператора (24) совпадает с правой частью формулы (16).

Следует отметить, что для случая входных сигналов, являющихся обыкновенными непрерывными в моменты $t = kT$ функциями, полученные формулы позволяют получить еще одну физически наглядную, хотя и нестрогую интерпретацию работы АИ-элемента.

Рассмотрим последовательное соединение двух элементов, изображенное на рис. 6. Предполагается, что в первом элементе входной сигнал умножается на $\delta_T(t)$, т. е. $z = x \delta_T(t)$, после чего сигнал z поступает на формирующий элемент, т. е. $y = W_\Phi(p) z$, следовательно

$$y = W_\Phi(p) z, \quad z = \delta_T(t) x. \quad (1.27)$$

Полагая здесь $x = e^{pt}$ и используя формулу (26), легко проверить, что передаточная функция цепи, изображенной на рис. 6, совпадает с (16).

Представление АИ-элемента в виде последовательной цепи, изображенной на рис. 6, широко используется

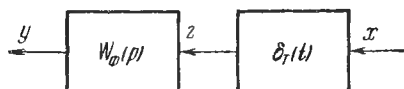


Рис. 6.

в теории импульсных систем [26, 103]. Уравнения такой эквивалентной цепи можно записать в виде

$$y = h_{\Phi} * [\delta_T(t) x(t)]. \quad (1.28)$$

В такой форме уравнение АИ-элемента имеет смысл для входных сигналов, непрерывных при $t = kT$, где k — целое число. Пусть, например, входной сигнал $x(t)$ непрерывен и действует при $t \geq 0$. Тогда по свойству умножения (I.3.3)

$$\delta_T(t) x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) x(kT), \quad (1.29)$$

и, следовательно, по (28) и (II.1.19)

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h_{\Phi} * \delta(t - kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) h_{\Phi}(t - kT), \quad (1.30)$$

что совпадает с (2), если учесть (18).

Для дальнейшего нам понадобится также знание СИЧХ АИ-элемента. В соответствии с общей формулой (II.6.15) СИЧХ АИ-элемента дается рядом

$$\varphi_a(T, \lambda, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_a(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega\tau}. \quad (1.31)$$

Подставляя сюда передаточную функцию (7) и учитывая, что

$$W_a(\lambda + si\omega, t) = e^{-(\lambda + si\omega)t} m(t), \quad 0 < t < T, \quad (1.32)$$

т. е.

$$W_a(\lambda + si\omega, t) = e^{-si\omega t} W_a(\lambda, t), \quad (1.33)$$

и из (31) имеем

$$\varphi_a(T, \lambda, t, \tau) = W_a(\lambda, t) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega(t-\tau)},$$

т. е.

$$\varphi_a(T, \lambda, t, \tau) = W_a(\lambda, t) \delta_T(t - \tau). \quad (1.34)$$

Заменяя здесь τ на $t - \tau$, имеем также

$$\varphi_a(T, \lambda, t, t - \tau) = W_a(\lambda, t) \delta_T(\tau). \quad (1.35)$$

Из (35) следует, что АИ-элемент не является фильтрующим, так как его СИЧХ является обобщенной функцией, не сводящейся к обыкновенной.

В некоторых случаях приходится также рассматривать АИ-элементы, имеющие во времени сдвиг по фазе. Уравнение такого элемента, в отличие от (2), имеет вид

$$y(t) = x(nT + t_0) m(t - t_0) \quad \text{при} \quad nT + t_0 \leq t < (n+1)T + t_0, \quad (1.36)$$

где $m(t)$ — модулируемая функция (1). Если положить $x = e^{pt}$, то имеем, аналогично (7), передаточную функцию

$$W_a(p, t, t_0) = e^{-pt} e^{p(nT+t_0)} m(t - t_0), \quad (1.37) \\ nT + t_0 \leq t < (n+1)T + t_0,$$

т. е.

$$W_a(p, t, t_0) = e^{-p(t-t_0)} m(t - t_0), \\ t_0 \leq t < t_0 + T, \quad W_a(p, t, t_0) = W_a(p, t + T, t_0).$$

Сравнивая это выражение с (7), получаем, что

$$W_a(p, t, t_0) = W_a(p, t - t_0). \quad (1.38)$$

Из (38) и (27) следует, что АИ-элемент, работающий со сдвигом по фазе, можно представить, по аналогии с (27), в виде

$$y = W_\phi(p) z, \quad z = \delta_T(t - t_0) x. \quad (1.39)$$

Далее, учитывая, что для передаточной функции (38)

$$W_a(\lambda + si\omega, t - t_0) = e^{-si\omega(t-t_0)} W_a(p, t - t_0), \quad (1.40)$$

и используя (31), найдем соответствующую СИЧХ:

$$\begin{aligned} \varphi_a(T, \lambda, t - t_0, t - \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_a(\lambda + ki\omega, t - t_0) e^{ki\omega(t-\tau)} = \\ &= W_a(\lambda, t - t_0) \delta_T(\tau - t_0). \end{aligned} \quad (1.41)$$

При $\lambda = 0$ отсюда с учетом (37) получаем ИЧХ АИ-элемента:

$$\varphi(T, t - t_0, t - \tau) = m(t - t_0) \delta_T(\tau - t_0). \quad (1.42)$$

Если на АИ-элемент действует произвольный периодический сигнал $x(t)$ периода T , то по (42) и (II.6.6) имеем выходную координату

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^T m(t - t_0) \delta_T(\tau - t_0) x(\tau) d\tau = \\ &= m(t - t_0) \int_0^T \delta(\tau - t_0) x(\tau) d\tau = m(t - t_0) x(t_0), \end{aligned} \quad (1.43)$$

что полностью согласуется с (36).

Из последнего соотношения вытекает одно важное следствие. Если входной сигнал АИ-элемента (36) имеет вид (II.6.12):

$$x(t) = e^{\lambda t} x_{\Pi}(t), \quad x_{\Pi}(t) = x_{\Pi}(t + T), \quad (1.44)$$

то его можно заменить эквивалентным входным сигналом

$$x(t) = e^{\lambda t} x_{\Pi}(t_0), \quad (1.45)$$

и, следовательно, выходной сигнал $y(\lambda, t)$ в этом случае может быть представлен в виде

$$y(\lambda, t) = e^{\lambda t} W_a(\lambda, t - t_0) x_{\Pi}(t_0). \quad (1.46)$$

Это же соотношение можно получить, используя (42) и (II.6.17). Используя свойства АИ-элементов вида (36), можно представить простейший АИ-элемент (2) в виде параллельного соединения АИ-элементов, имеющих период nT , где n — любое целое число. Действительно, положим

$$m_1(t) = m_1(t + nT), \quad m_1(t) = \begin{cases} m(t), & 0 < t < T, \\ 0, & T < t < nT, \end{cases} \quad (1.47)$$

где $m(t)$ — модулируемая функция, фигурирующая в (1), и рассмотрим АИ-элемент вида (2), имеющий период nT , с модулируемой функцией (47). Передаточная функция такого АИ-элемента, в соответствии с (7), равна

$$\left. \begin{aligned} W_{an}(p, t) &= e^{-pt} m_1(t), \quad 0 < t < nT, \\ W_{an}(p, t) &= W_{an}(p, t + nT). \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Разложение в ряд Фурье функции W_{an} дает

$$W_{an}(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{ank} e^{ki\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\omega}{n}, \quad T_1 = nT, \quad (1.49)$$

где

$$W_{ank} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} m_1(\tau) e^{-(p+ki\omega_1)\tau} d\tau = \frac{1}{nT} \int_0^T m(\tau) e^{-(p+ki\omega_1)\tau} d\tau, \quad (1.50)$$

так что с учетом (14) ряд Фурье (49) имеет вид

$$W_{an}(p, t) = \frac{1}{nT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\Phi}(p + ki\omega_1) e^{ki\omega_1 t}. \quad (1.51)$$

Введем теперь в рассмотрение сдвинутые по фазе АИ-элементы, получающиеся из (48) сдвигом на kT , $k = 1, 2, \dots, n-1$. Передаточные функции таких АИ-элементов по (38) и (48) будут иметь вид

$$W_k = W_{an}(p, t - kT) = \begin{cases} 0, & 0 < t < kT, \\ e^{-p(t-kT)} m(t), & kT < t < (k+1)T, \\ 0, & (k+1)T < t < nT. \end{cases} \quad (1.52)$$

Тогда нетрудно проверить, что при любом n имеет место равенство

$$W_a(p, t) = \sum_{k=0}^{n-1} W_{an}(p, t - kT), \quad (1.53)$$

которое в дальнейшем будет использовано. Из (53), в частности, следует, что если входной сигнал импульс-

ного элемента (1) имеет вид $x = e^{\lambda t} x_{\pi}(t)$, но с тем отличием от (44), что $x_{\pi}(t) = x_{\pi}(t + kT)$, то выходной сигнал можно представить следующим образом:

$$y(\lambda, t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} W_{an}(\lambda, t - kT) x_{\pi}(kT). \quad (1.54)$$

§ 2. Линейные экстраполирующие устройства как периодические операторы

Различные типы экстраполирующих устройств имеют широкое применение в импульсных и цифровых системах управления [43, 103]. В настоящем параграфе такие устройства математически описываются линейными периодическими операторами, что дает возможность вычислить их основные характеристики — передаточные и весовые функции, а также ИЧХ и СИЧХ.

Наиболее распространенными являются дискретные экстраполяторы, осуществляющие *степенной закон экстраполяции*. Математически их действие можно описать следующим образом. Выходной сигнал элемента $y(t)$, осуществляющего степенную экстраполяцию s -го порядка, равен

$$y(t) = \sum_{k=0}^s \alpha_k(x) \varepsilon^k \quad \text{при } nT < t < (n+1)T, \quad \varepsilon = t - nT, \quad (2.1)$$

где n — целые числа; $\alpha_k(x)$ — коэффициенты, являющиеся функциями входного сигнала и равные

$$\alpha_{nk} = \alpha_k[x(t)] = \sum_{v=0}^l \beta_{kv} x[(n-v)T] \quad (2.2)$$

$$\text{при } nT < t < (n+1)T,$$

где β_{kv} — постоянные, определяющие закон экстраполяции. Из (2) следует, что коэффициенты α_k на каждом интервале $nT < t < (n+1)T$ имеют некоторые постоянные значения α_{nk} .

В некоторых случаях, когда экстраполятор осуществляет не только экстраполяцию, но и сглаживание измеряемых данных, коэффициенты α_k также изменяются еще и в зависимости от ранее вычисленных значений

коэффициентов α_k . Весьма общим законом изменения этих коэффициентов является разностное уравнение вида

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=0}^l \beta_{k\nu} x[(n-\nu)T] + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} \alpha_{n-\mu, k} \quad (2.3)$$

при $nT < t < (n+1)T$,

где $\beta_{k\nu}$ и $\gamma_{k\mu}$ — постоянные величины, не зависящие от входного сигнала.

Экстраполятор, описываемый формулой (3), назовем *экстраполятором с обратной связью*. При $\gamma_{si} = 0$ (3) переходит в уравнение экстраполятора без обратной связи (2).

Нетрудно получить также уравнения экстраполяторов и более общего вида. Пусть

$$m_k(t) = m_k(t+T), \quad k=0, 1, \dots, s, \quad (2.4)$$

— произвольные периодические функции. Тогда уравнение

$$y(t) = \sum_{k=0}^s \alpha_{nk}(x) m_k(t), \quad nT < t < (n+1)T, \quad (2.5)$$

где коэффициенты α_{nk} определяются соотношениями (2) или (3), описывает широкий класс экстраполирующих устройств. Например, если

$$m_k(t) = t^k, \quad 0 < t < T,$$

то из (5) получится уравнение (1); если $m_k(t)$ — тригонометрические полиномы, то (5) даст уравнение устройства, осуществляющего тригонометрическую экстраполяцию, и т. д.

Из формул (5) и (3) непосредственно следует, что если рассматривать соответствие между входным и выходным сигналами экстраполятора (5), то этот оператор будет линейным. Более того, этот оператор будет периодическим, так как сдвиг входного сигнала на величину такта T вызовет, очевидно, сдвиг выходного сигнала на T без изменения формы, т. е. будет выполнено условие (II.4.17).

Перейдем к определению передаточной функции оператора (5). Для этого заметим прежде всего, что формулы (2) и (3), рассматриваемые во времени, также

определяют линейные периодические операторы. Действительно, формула (3) каждому входному сигналу $x(t)$ сопоставляет кусочно-постоянную ступенчатую функцию $\alpha_k(t)$. Поэтому формулу (3) можно записать в виде

$$\alpha_k[x(t)] = \sum_{v=0}^l \beta_{kv} x[(n-v)T] + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} \alpha_k[x(t-\mu T)], \quad (2.6)$$

$$nT < t < (n+1)T.$$

Теперь нетрудно, используя (II.1.7), найти передаточную функцию оператора (6). Если $x = e^{pt}$, то

$$\alpha_k(e^{pt}) = e^{pt} W_k(p, t), \quad (2.7)$$

где $W_k(p, t)$ — передаточная функция оператора (6). Но тогда, поскольку в силу периодичности системы выполнено условие (II.4.18), имеем при любом целом s

$$\alpha_k[e^{p(t-sT)}] = e^{p(t-sT)} W_k(p, t-sT) = e^{p(t-sT)} W_k(p, t). \quad (2.8)$$

Поэтому, подставляя в (6) $x = e^{pt}$ и используя соотношения (7) и (8), находим

$$p^{pt} W_k(p, t) = \sum_{v=0}^l \beta_{kv} e^{p(n-v)T} + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} e^{p(t-\mu T)} W_k(p, t),$$

$$nT < t < (n+1)T,$$

откуда получаем искомую передаточную функцию:

$$W_k(p, t) = \frac{\sum_{v=0}^l \beta_{kv} e^{p[(n-v)T-t]}}{1 - \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} e^{-p\mu T}}, \quad nT < t < (n+1)T. \quad (2.9)$$

Легко убедиться, что функция (9) действительно является периодической по t с периодом T .

Окончательно выражение (9) можно представить в более простом виде:

$$W_k(p, t) = \frac{\sum_{v=0}^l \beta_{kv} e^{-p[vT+t]}}{1 - \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} e^{-p\mu T}}, \quad 0 < t < T, \quad (2.10)$$

$$W_k(p, t) = W_k(p, t+T),$$

Для экстраполятора без обратной связи при $\gamma_{k\mu} = 0$ из (10) получаем более простое выражение:

$$W_k(p, t) = \sum_{v=0}^l \beta_{kv} e^{-p[vT+t]} = \left(\sum_{v=0}^l \beta_{kv} e^{-pvT} \right) e^{-pt}, \quad 0 < t < T, \quad (2.11)$$

$$W_k(p, t) = W_k(p, t + T).$$

Сравнивая формулы (11) и (1.7), легко убедиться, что передаточная функция (11) соответствует параллельному соединению простейших импульсных элементов,

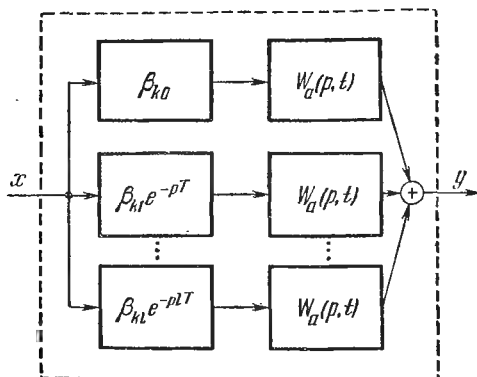


Рис. 7.

перед которыми имеются звенья чистого запаздывания (рис. 7). Передаточной функции (10) соответствует



Рис. 8.

последовательное соединение стационарного элемента с передаточной функцией

$$W_{0k}(p) = \frac{1}{1 - \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} e^{-p\mu T}} \quad (2.12)$$

и системы (11) (рис. 8).

Используя полученные соотношения, легко получить передаточную функцию экстраполятора (5). Подставляя в (5) $x = e^{pt}$, в соответствии с (7) имеем

$$U(e^{pt}) = \sum_{k=0}^s W_k(p, t) m_k(t) e^{pt},$$

т. е. искомая передаточная функция экстраполятора $W_s(p, t)$ равна

$$W_s(p, t) = \sum_{k=0}^s W_k(p, t) m_k(t), \quad (2.13)$$

где передаточные функции $W_k(p, t)$, $k = 0, 1, \dots, s$, определяются формулами (10).

Подставляя в (13) выражение для передаточной функции $W_k(p, t)$ (10), получим окончательно

$$W_s(p, t) = \sum_{k=0}^s \sum_{v=0}^l \frac{m_k(t) \beta_{kv} e^{-p(vT+t)}}{1 - \sum_{\mu=1}^r \gamma_{k\mu} e^{-p\mu T}}, \quad 0 < t < T, \quad (2.14)$$

$$W_s(p, t) = W_s(p, t + T),$$

откуда видно, что экстраполятор (5) может быть представлен в виде эквивалентного параллельно-последовательного соединения стационарных элементов с передаточными функциями типа (12), звеньев чистого запаздывания и простейших амплитудно-импульсных элементов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Этот вывод важен с практической точки зрения, так как позволяет свести изучение широкого класса линейных цифровых систем к системе, содержащей лишь простейшие амплитудно-импульсные элементы.

Пример 2.1. Рассмотрим экстраполятор, изучавшийся в [31] и описываемый в обозначениях (1), (2) формулами

$$\left. \begin{aligned} y &= \alpha_1(x) \varepsilon + \alpha_2(x), \\ nT &< t < (n+1)T, \quad \varepsilon = t - nT, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2T} \{x(nT) - x[(n-2)T]\}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{6} \{5x(nT) + 2x[(n-1)T] - x[(n-2)T]\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Легко убедиться, что экстраполятор (15) является частным случаем экстраполятора без обратной связи. Его передаточная функция, в соответствии с (11) и (13), имеет вид

$$W_{\Sigma}(p, t) = \frac{te^{-pt}}{2T} (1 - e^{-2pT}) + \frac{e^{-pt}}{6} (5 + 2e^{-pT} - e^{-2pT}), \quad (2.16)$$

$$0 \leq t < T,$$

$$W_{\Sigma}(p, t) = W_{\Sigma}(p, t + T).$$

Перейдем теперь к построению СИЧХ рассматриваемого класса экстраполяторов. Найдем сначала СИЧХ, соответствующую передаточной функции (10). Заменяя в (10) p на $p + si\omega$, имеем, аналогично (1.33),

$$W_k(p + si\omega, t) = e^{-si\omega t} W_k(p, t), \quad (2.17)$$

поскольку знаменатель передаточной функции (10) не меняется при замене p на $p + si\omega$. Поэтому соответствующая СИЧХ равна

$$\begin{aligned} \Phi_k(T, p, t, \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(p + ki\omega, t) e^{ki\omega \tau} = \\ &= W_k(p, t) \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega (t-\tau)} \right] = W_k(p, t) \delta_T(t - \tau), \end{aligned} \quad (2.18)$$

откуда следует также, что

$$\Phi_k(T, p, t, t - \tau) = W_k(p, t) \delta_T(\tau). \quad (2.19)$$

Имея выражение (19), можно сразу получить СИЧХ соответствующей передаточной функции (13):

$$\Phi_{\Sigma}(T, p, t, t - \tau) = W_{\Sigma}(p, t) \delta_T(\tau). \quad (2.20)$$

Для определения весовой функции экстраполятора следует предварительно найти каноническое представление его передаточной функции, для чего требуется представить ее рядом Фурье по t . На подробностях такого вычисления останавливаться не будем, так как оно вполне аналогично вычислению, проведенному в предыдущем параграфе для простейшего АИ-элемента.

Отметим также, что из (20) следует важная формула, аналогичная (1.46). Именно, если на вход экстраполятора действует входной сигнал вида (1.44), то соответствующий выход определяется следующим образом:

$$y = e^{\lambda t} W_{\Sigma}(\lambda, t) x_{\Pi}(0). \quad (2.21)$$

Формула (21) следует из (20) точно так же, как (1.46) следует из (1.42).

§ 3. Разомкнутые линейные импульсные системы

В настоящем параграфе приводятся способы построения передаточных функций и других характеристик разомкнутых импульсных систем.

Под *разомкнутой импульсной системой* понимается система, состоящая из произвольных линейных периодических элементов, а также периодических импульсных элементов и экстраполирующих устройств, соединенных между собой последовательно или параллельно. При этом предполагается, что периоды T_i всех элементов, входящих в систему, находятся между собой в рациональных отношениях. В этом случае без ограничения общности можно предполагать, что все элементы имеют общий период, являющийся наименьшим общим кратным периодов T_i . Для простоты изложения будет предполагаться также, что все импульсные элементы, входящие в систему, относятся к простейшему типу, рассмотренному в § 1 этой главы. Такое предположение также не нарушает общности, ибо, как было показано выше, к соединениям элементов такого типа сводятся и более сложные устройства.

В принципе задача, рассматриваемая в этом параграфе, является частным случаем более общей задачи, рассмотренной в § 6 гл. II, и решается на основе формул этого параграфа. Однако специфические свойства импульсных элементов приводят к ряду дополнительных соотношений, имеющих важное практическое значение.

При параллельном соединении импульсных и произвольных периодических элементов, имеющих одинаковый период, их передаточные функции складываются.

Поэтому сразу перейдем к рассмотрению последовательных соединений.

Пусть сначала имеем последовательное соединение импульсного элемента с передаточной функцией $W_a(p, t)$ (1.7) и произвольного периодического элемента

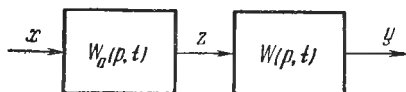


Рис. 9.

с передаточной функцией $W(p, t)$, который будем называть непрерывным (рис. 9). Уравнения такой разомкнутой системы имеют вид

$$y = W(p, t) z, \quad z = W_a(p, t) x, \quad (3.1)$$

где $W_a(p, t)$ — передаточная функция простейшего АИ-элемента (1.7), причем

$$W(p, t) = W(p, t + T), \quad W_a(p, t) = W_a(p, t + T).$$

Для нахождения передаточной функции системы (1) воспользуемся общей формулой (II.6.29), которая в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} W_p(p, t) &= \int_0^T \varphi(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau = \\ &= W(p, t) \circ W_a(p, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $W_p(p, t)$ — передаточная функция разомкнутой системы, φ — соответствующая СИЧХ непрерывного элемента системы (1). Подставляя сюда (1.7), находим

$$W_p(p, t) = \int_0^T \varphi(T, p, t, t - \tau) m(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

Выражение $W_p(p, t)$ в виде ряда можно получить, если воспользоваться формулой (II.6.31). Если учесть, что в соответствии с (1.15) в данном случае

$$W_{ak} = \frac{1}{T} W_\varphi(p + ki\omega),$$

где $W_{\Phi}(p)$ — передаточная функция формирующего элемента, то из (II.6.31) получаем

$$W_p(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega, t) W_{\Phi}(p + ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (3.4)$$

Заметим, что если рассмотреть последовательное соединение формирующего элемента и непрерывного элемента, которое назовем *приведенной непрерывной частью* системы (1):

$$y_1 = W(p, t) z_1, \quad z_1 = W_{\Phi}(p) x_1, \quad (3.5)$$

то в силу того, что формирующий элемент — стационарный, передаточная функция $W_H(p, t)$ приведенной непрерывной части (5) равна

$$W_H(p, t) = W(p, t) W_{\Phi}(p) \quad (3.6)$$

и, следовательно, передаточную функцию (4) можно представить в виде

$$W_p(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_H(p + ki\omega, t) e^{ki\omega t}. \quad (3.7)$$

С другой стороны, по (II.6.15) СИЧХ $\Phi_H(T, p, t, \tau)$ приведенной непрерывной части системы равна

$$\Phi_H(T, p, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_H(p + ki\omega, t) e^{ki\omega \tau}. \quad (3.8)$$

Сравнивая (7) и (8), получаем, что передаточная функция разомкнутой системы (1) равна СИЧХ ее приведенной непрерывной части, вычисленной при $\tau = t$. Если СИЧХ $\Phi(T, p, t, \tau)$ известна в замкнутой форме, то для вычисления $W_p(p, t)$ удобнее бывает непосредственно воспользоваться формулой (3).

Найдем передаточную функцию системы (1) для того случая, когда непрерывный элемент является стационарным и имеет сосредоточенные параметры, т. е. его передаточная функция имеет вид (II.3.51). Для

этого используем формулы (II.3.69). Из (II.3.69) следует, что

$$\varphi(T, p, t, t - \tau) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{v_l} \frac{c_{lk}}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dp_l^{k-1}} \cdot \frac{e^{(p_l-p)(t-\tau)}}{1 - e^{(p_l-p)T}}, & 0 < t - \tau < T, \\ \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{v_l} \frac{c_{lk}}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dp_l^{k-1}} \cdot \frac{e^{(p_l-p)(t-\tau+T)}}{1 - e^{(p_l-p)T}}, & -T < t - \tau < 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Подставляя (9) в (3), находим

$$W_p(p, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{v_l} c_{lk} \gamma_{lk}(p, t), \quad (3.10)$$

где

$$\gamma_{lk}(p, t) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dp_l^{k-1}} \left[\frac{e^{(p_l-p)t}}{1 - e^{(p_l-p)T}} \times \right. \\ \left. \times \left(\int_0^t e^{-p_l \tau} m(\tau) d\tau + e^{(p_l-p)T} \int_t^T e^{-p_l \tau} m(\tau) d\tau \right) \right], \quad 0 < t < T. \quad (3.11)$$

В том случае, когда передаточная функция $W(p)$ имеет только простые полюсы и справедлива формула (II.3.70), соотношения (9), (10) упрощаются:

$$W_p(p, t) = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho} e^{(p_{\rho}-p)t}}{1 - e^{(p_{\rho}-p)T}} \times \\ \times \left[\int_0^t e^{-p_{\rho} \tau} m(\tau) d\tau + e^{(p_{\rho}-p)T} \int_t^T e^{-p_{\rho} \tau} m(\tau) d\tau \right], \quad 0 < t < T. \quad (3.12)$$

Отметим, что в классических методах исследования импульсных систем понятие передаточной функции вводится иначе, чем в настоящей книге. Например, в работе [103] передаточной функцией системы вида

$$y = W(p)z, \quad z = \delta_T(t)x \quad (3.13)$$

называется отношение

$$W^*(p, t) = \frac{z^*(p, t)}{x^*(p, 0)}, \quad (3.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z^*(p, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} z(kT + t) e^{-pkT}, \\ x^*(p, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}, \end{aligned} \right\} 0 \leq t < T. \quad (3.15)$$

При этом показывается, что для системы (13) отношение в правой части (14) не зависит от конкретного вида входного сигнала и равно

$$W^*(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega) e^{(p+ki\omega)t}, \quad 0 \leq t < T^*), \quad (3.16)$$

т. е.

$$W^*(p, t) = e^{pt} \varphi(T, p, t), \quad (3.17)$$

где $\varphi(T, p, t)$ — СИЧХ непрерывной части системы (13), и отличается от передаточной функции $W_p(p, t) = \varphi(T, p, t)$, к которой приводит выражение (3) для системы (13), лишь экспоненциальным множителем.

Определенная таким образом формулой (14) передаточная функция системы (13) обладает рядом важных свойств и может быть положена в основу расчета этой системы.

В то же время попытка распространить понятие передаточной функции в смысле (14) на другие классы систем наталкивается на трудности, так как часто отношение, стоящее в правой части (14), оказывается зависящим от вида входного сигнала. Как показано в [103], такая ситуация появляется даже во многих простейших системах, например при последовательном соединении импульсных систем с нисходящим периодом повторения, при параллельном соединении импульсного и непрерывного элементов и т. п. Поэтому в указанных и многих других важных случаях применить понятие передаточной функции в смысле (14) не удастся.

*) В соответствующих формулах книги [103] принято $T = 1$.

Напомним, что в настоящей книге передаточная функция вводится другим путем. Именно, вся исследуемая система рассматривается как линейный периодический оператор типа (II. 4.1):

$$y = U(x),$$

причем передаточная функция равна

$$W(p, t) = e^{-pt} U(e^{pt}), \quad W(p, t) = W(p, t + T).$$

Такой подход является весьма общим и универсальным, так как фактически для существования передаточной функции требуется только, чтобы имело смысл выражение $U(e^{pt})$.

Именно это обстоятельство делает передаточную функцию в указанном смысле удобным средством исследования широкого класса импульсных систем, в том числе таких, для которых передаточная функция в смысле (14) не существует. В тех случаях, когда удастся ввести передаточную функцию (14), применение предлагаемого подхода приводит к сходным результатам, поскольку между передаточными функциями (16) и (7), очевидно, имеется тесная связь:

$$W^*(p, t) = e^{pt} W_p(p, t).$$

Отметим теперь, что если интересоваться значениями выходного сигнала только в моменты $t_0 + kT$, где t_0 — произвольный момент, то можно вместо нестационарной системы с передаточной функцией (3) рассматривать стационарную систему с передаточной функцией, замороженной при $t = t_0$, т. е.

$$y_1 = W_p(p, t_0) x_1, \quad (3.18)$$

где

$$W_p(p, t_0) = \int_0^T \varphi(T, p, t_0, t_0 - \tau) m(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (3.19)$$

Как вытекает из формул (II. 8.7), при одинаковом входном воздействии переходные процессы на выходе систем (1) и (18) в моменты $t = t_0 + kT$ будут совпа-

дать. В частности, если положить $t_0 = 0$, то из (7) получится

$$W_p(p, 0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_n(p + ki\omega, 0). \quad (3.20)$$

В исходной системе (1) и стационарной системе (18) с передаточной функцией (20) выходные координаты совпадают при одинаковом входном воздействии при $t = kT$. В том случае, когда непрерывная часть системы (1) — стационарная, $W(p, t) = W(p)$ и из (20) имеем

$$W_p(p, 0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_n(p + ki\omega). \quad (3.21)$$

Такой формой передаточной функции импульсной системы широко пользуются в классических методах исследования импульсных систем [25, 103].

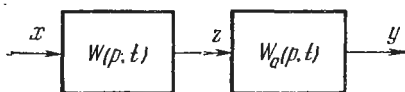


Рис. 10.

Перейдем теперь к рассмотрению другой задачи, когда в последовательной разомкнутой цепи импульсный элемент следует за непрерывным, т. е. (рис. 10)

$$y = W_a(p, t) z, \quad z = W(p, t) x. \quad (3.22)$$

Пусть сигнал $z(t)$, поступающий на импульсный элемент, — непрерывный, для чего, вообще говоря, необходимо, чтобы передаточная функция $W(p, t)$ была непрерывной по аргументу t , что далее предполагается.

По общей формуле (II.6.31) находим передаточную функцию системы:

$$W_p(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_a(p + ki\omega, t) W_k(p) e^{ki\omega t}, \quad (3.23)$$

где, как и ранее,

$$W(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(p) e^{ki\omega t}. \quad (3.24)$$

Учитывая (1.33), из (23) сразу получим

$$W_p(p, t) = W_a(p, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(p),$$

т. е.

$$W_p(p, t) = W_a(p, t) \circ W(p, t) = W_a(p, t) W(p, 0). \quad (3.25)$$

Этот же результат можно получить, используя формулы (II.6.29) и (1.35). Действительно, по (II.6.29) и (1.35) из (22) имеем

$$\begin{aligned} W_p(p, t) &= \int_0^T \varphi_a(T, p, t, t - \tau) W(p, \tau) d\tau = \\ &= W_a(p, t) \int_0^T \delta_T(\tau) W(p, \tau) d\tau = W_a(p, t) W(p, 0), \end{aligned}$$

что совпадает с (25).

Совершенно аналогично, если в системе (22) импульсный элемент сдвинут по фазе и его передаточная функция имеет вид (1.38), то передаточная функция системы (22), в соответствии с (II.6.29) и (1.41), равна

$$\begin{aligned} W_p(p, t) &= W_a(p, t - t_0) \int_0^T \delta(\tau - t_0) W(p, \tau) d\tau = \\ &= W_a(p, t - t_0) W(p, t_0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Заметим теперь, что если при этом вместо системы (22) рассмотрим систему со стационарным непрерывным элементом

$$y = W_a(p, t - t_0) z, \quad z = W(p, t_0) x, \quad (3.27)$$

«замороженным» в момент t_0 , то его передаточная функция по (II.6.23) будет также равна

$$W_p(p, t) = W_a(p, t - t_0) W(p, t_0).$$

Отсюда следует на первый взгляд парадоксальный вывод о том, что АИ-элемент, стоящий после произвольного линейного периодического элемента, превращает его в стационарный элемент с передаточной функцией, равной передаточной функции периодического элемента, замороженной в момент фиксации.

Однако более подробное рассмотрение подтверждает этот вывод и показывает, что он является прямым следствием периодичности передаточной функции по аргументу t и формулы (II. 8.7).

Покажем это на примере системы (22) при АИ-элементе (1.7). Пусть $x(t)$ — произвольный входной сигнал. Тогда по (22) и (II. 8.4)

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, t) X(p) e^{pt} dp. \quad (3.28)$$

При этом, по определению импульсного элемента (1.2),

$$y(t) = z(kT) m(t), \quad kT < t < (k+1)T, \quad (3.29)$$

или с учетом (28)

$$y(t) = \frac{m(t)}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, kT) X(p) e^{pkT} dp, \\ kT < t < (k+1)T.$$

В силу того, что $W(p, t) = W(p, t+T)$, последнее соотношение принимает вид

$$y(t) = \frac{m(t)}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, 0) X(p) e^{pkT} dp, \quad (3.30) \\ kT < t < (k+1)T.$$

Если же рассмотреть вместо (22) систему со стационарным непрерывным элементом

$$y_1 = W_a(p, t) z_1, \quad z_1 = W(p, 0) x_1, \quad (3.31)$$

то

$$z_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W(p, 0) X(p) e^{pt} dp \quad (3.32)$$

и для y_1 получаем снова выражение (30).

Таким образом, системы (22) и (31) эквивалентны в том смысле, что при любом входном сигнале $x(t)$ их реакции $y(t)$ и $y_1(t)$ совпадают. В то же время

сигналы на входе импульсного элемента, определенные формулами (28) и (32), различны.

По существу, все сказанное является прямым следствием равенства (II.8.7), так как выходные координаты непрерывных элементов систем (22) и (31) в моменты $t = kT$ совпадают, а импульсный элемент реагирует только на эти значения.

Найдем теперь СИЧХ систем (1) и (22). Заменяя в (7) p на $p + si\omega$, найдем

$$W_p(p + si\omega, t) = W_p(p, t) e^{-si\omega t}. \quad (3.33)$$

Поэтому выражение для СИЧХ системы (1) получается следующим:

$$\begin{aligned} \varphi_p(T, p, t, \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} W_p(p + si\omega, t) e^{si\omega \tau} = \\ &= W_p(p, t) \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-si\omega(t-\tau)}, \end{aligned}$$

и

$$\varphi_p(T, p, t, t - \tau) = W_p(p, t) \delta_T(\tau). \quad (3.34)$$

Аналогичным образом, взяв передаточную функцию (25), можно построить СИЧХ системы (22). Имеем

$$\varphi_p(T, p, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_a(p + ki\omega, t) W(p + ki\omega, 0) e^{ki\omega \tau}.$$

С учетом (1.33) это приводит к равенству

$$\varphi_p(T, p, t, t - \tau) = W_a(p, t) \varphi(T, p, 0, -\tau). \quad (3.35)$$

Из формулы (34) следует, что система (1) не является фильтрующей. В то же время из (35) вытекает, что разомкнутая система (22) является фильтрующей, если этим свойством обладает непрерывная часть системы (22). Таким образом, мы приходим к интересному выводу о том, что фильтрующие свойства разомкнутой цепи в общем случае зависят от порядка соединения входящих в нее элементов.

Рассмотрим теперь разомкнутые импульсные системы, элементы которых имеют различные периоды по-

вторения. Пусть в системе (1)

$$W(p, t) = W(p, t + nT), \quad W_a(p, t) = W_a(p, t + T). \quad (3.36)$$

Такую систему в соответствии с терминологией [103] будем называть *нисходящей*. Рассматривая функцию $W_a(p, t)$ (1.7) как имеющую период nT и используя (II.6.40), получим передаточную функцию нисходящей системы:

$$W_p(p, t) = \int_0^{T_1} \varphi(T_1, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau, \quad T_1 = nT, \quad (3.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi(T_1, p, t, t - \tau) &= \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega_1, t) e^{ki\omega_1(t-\tau)}, \\ \omega_1 &= \frac{2\pi}{nT} = \frac{\omega}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Если же воспользоваться каноническим представлением функции $W_a(p, t)$ и формулой (II.6.43), то получим, что в рассматриваемом случае

$$W_p(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega, t) W_{\phi}(p + ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (3.39)$$

При этом передаточная функция $W_p(p, t)$ имеет по t период, равный $T_1 = nT$.

Если вместо (36) имеем

$$W(p, t) = W(p, t + T), \quad W_a(p, t + T_1) = W_a(p, t), \quad (3.40)$$

т. е. импульсный элемент имеет период nT , то систему (1) называют *восходящей*. Применяя соображения, аналогичные изложенным, передаточную функцию восходящей системы можно представить в виде

$$W_p(p, t) = \int_0^{T_1} \varphi(T_1, p, t, t - \tau) W_{1a}(p, \tau) d\tau, \quad (3.41)$$

где функция φ снова дается формулой (38), а функция $W_{1a}(p, t)$ получается из (1.7) заменой T на T_1 . При

этом, если использовать общее соотношение (II.6.31), то из (41) получится

$$W_p(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + ki\omega_1, t) W_{1\Phi}(p + ki\omega_1) e^{ki\omega_1 t}, \quad (3.42)$$

причем

$$W_{1\Phi}(p) = \int_0^{T_1} m(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (3.43)$$

а модулируемая функция $m(t)$ предполагается имеющей период nT .

Аналогичным образом можно рассмотреть восходящую и нисходящую системы вида (22). В нисходящей системе (22), когда имеют место условия (40), можно сразу воспользоваться формулой (25), так как передаточную функцию $W(p, t)$ при этом можно считать имеющей период T_1 . Поэтому имеем при условии (40) для системы (22)

$$W_p(p, t) = W_a(p, t) W(p, 0), \quad (3.44)$$

т. е. формула (25) сохраняется, хотя и имеет несколько другое значение.

При выполнении (36) система (22) является восходящей. Для получения передаточной функции в этом случае удобно воспользоваться формулой (1.53), с помощью которой уравнения системы (22) при условии (36) можно представить в виде

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} z_k, \quad z_k = W_{an}(p, t - kT) u, \quad u = W(p, t) x. \quad (3.45)$$

Применяя формулу (26), получим передаточную функцию системы (45) в виде

$$W_p(p, t) = \sum_{k=0}^{n-1} W_{an}(p, t - kT) W(p, kT). \quad (3.46)$$

Все сказанное позволяет строить передаточные функции и СИЧХ произвольных разомкнутых импульсных периодических систем.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.1. Пусть

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) u, & u &= W_a(p, t) v, \\ v &= W_1(p) z, & z &= (\sin \omega t) x, \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

причем АИ-элемент имеет период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и его передаточная функция дается выражением (1.7). Передаточная функция от x к v имеет вид (II.6.60). Тогда, учитывая формулы (II.6.60) и (25), вместо (47) можно написать

$$y = W_2(p) u, \quad u = W_a(p, t) \left[\frac{W_1(p + i\omega)}{2i} - \frac{W_1(p - i\omega)}{2i} \right] x.$$

Но отсюда по (2) и (II.6.33) сразу получаем передаточную функцию системы (47):

$$W_p(p, t) = \frac{1}{2i} [W_1(p + i\omega) - W_1(p - i\omega)] \int_0^T \varphi_2(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau. \quad (3.48)$$

Пример 3.2. Рассмотрим разомкнутую систему, содержащую амплитудно-импульсные элементы I и II рода:

$$y = W_2(p) u, \quad u = W_a(p, t) v, \quad v = W_1(p) z, \quad z = f(t) x, \quad (3.49)$$

где, в отличие от системы (47), функция $f(t)$ имеет вид (II.6.61). Рассуждая, как и в предыдущем примере, сразу получим, что передаточная функция системы (49) равна

$$W_p(p, t) = W_{vx}(p, 0) \int_0^T \varphi_2(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau, \quad (3.50)$$

где W_{vx} — передаточная функция от x к v . Учитывая (II.6.62), формулу (50) можно представить в виде

$$W_p(p, t) = \int_0^T \varphi_2(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau \int_0^{t_1} \varphi_1(T, p, -\tau) d\tau. \quad (3.51)$$

Если дополнительно

$$\left. \begin{aligned} W_2(p) &= \sum_{\rho=1}^n \gamma_{2\rho} \frac{1}{p - p_{2\rho}}, & W_1(p) &= \sum_{\rho=1}^m \gamma_{1\rho} \frac{1}{p - p_{1\rho}}, \\ m(t) &= 1, & p_{1\alpha} &\neq p_{2\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

то, используя (II.6.64) и (3.12), найдем

$$\begin{aligned} W_p(p, t) &= \left[- \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{2\rho}}{p_{2\rho}} e^{-p t} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-p T}) \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{2\rho}}{p_{2\rho}} \frac{e^{(p_{2\rho} - p) t}}{1 - e^{(p_{2\rho} - p) T}} \right] \left[W_1(p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\rho=1}^m \frac{\gamma_{1\rho}}{p_{1\rho} - p} \frac{1 - e^{(p_{1\rho} - p)(T - t_1)}}{1 - e^{(p_{1\rho} - p) T}} \right], \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Пример 3.3. Найдем передаточную функцию последовательной нисходящей импульсной системы, уравнения которой имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) u, & u &= W_{2a}(p, t) v, \\ v &= W_1(p) z, & z &= W_{1a}(p, t) x, \\ W_{1a}(p, t) &= W_{1a}(p, t + T), & W_{2a}(p, t) &= W_{2a}(p, t + T_1), \\ &T_1 &= nT. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Использование формул (2) и (44) сразу дает, что передаточная функция системы (54) равна

$$W_p(p, t) = W_2(p, t) W_1(p, 0), \quad (3.55)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_1(p, t) &= \int_0^T \varphi_1(T, p, t - \tau) W_{1a}(p, \tau) d\tau, \\ W_2(p, t) &= \int_0^{T_1} \varphi_2(T_1, p, t - \tau) W_{2a}(p, \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Пример 3.4. Вычислим передаточную функцию разомкнутой экстраполирующей системы

$$y = W(p, t) z, \quad z = W_3(p, t) x, \quad W(p, t) = W(p, t + T), \quad (3.57)$$

где $W_3(p, t)$ — передаточная функция экстраполятора, определяемая соотношениями (2.14).

Непосредственно по (II.6.29) и (2.14) имеем

$$W_p(p, t) = \int_0^T \varphi(T, p, t, t - \tau) W_3(p, \tau) d\tau \quad (3.58)$$

или, что эквивалентно, для случая (2.16)

$$\begin{aligned} W_p(p, t) = & \frac{1 - e^{-2pT}}{2T} \int_0^T \varphi(T, p, t, t - \tau) e^{-p\tau} d\tau + \\ & + \frac{5 + 2e^{-pT} - e^{-2pT}}{6} \int_0^T \varphi(T, p, t, t - \tau) e^{-p\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.59)$$

§ 4. Передаточные функции замкнутых одноконтурных импульсных систем

В настоящем параграфе будут построены передаточные функции широкого класса одноконтурных замкнутых импульсных систем, содержащих, кроме простейших

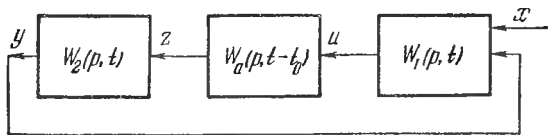


Рис. 11.

АИ-элементов, любые линейные периодические элементы. В частности, в цепи может быть несколько импульсных элементов. Единственное требование к системе состоит в том, чтобы все входящие в нее элементы приводились к одному периоду.

Для конкретности рассмотрим замкнутую систему, изображенную на рис. 11. Ее уравнения имеют вид

$$y = W_2(p, t) z, \quad z = W_a(p, t - t_0) u, \quad u = W_1(p, t) (y + x), \quad (4.1)$$

где

$$W_i(p, t) = W_i(p, t + T), \quad i = 1, 2,$$

и передаточная функция импульсного элемента $W_a(p, t - t_0)$ имеет вид (1.37).

Прежде всего заметим, что в силу формулы (3.26) элемент с передаточной функцией $W_1(p, t)$ можно заменить стационарным элементом с передаточной функцией $W_1(p, t_0)$, так как он находится в цепи непосредственно перед импульсным элементом. Поэтому уравнения (1) можно записать в виде

$$y = W_2(p, t) z, \quad z = W_a(p, t - t_0) u, \quad u = W_1(p, t_0) (y + x). \quad (4.2)$$

Перейдем к определению передаточной функции $W_c(p, t)$ системы (1). Для этого можно было бы воспользоваться общими интегральными уравнениями § 7 гл. II. Однако мы для лучшего уяснения существа дела воспользуемся более простыми непосредственными рассуждениями.

Пусть

$$x = e^{pt}, \quad y = W_c(p, t) e^{pt}, \quad W_c(p, t) = W_c(p, t + T); \quad (4.3)$$

тогда на элемент 1 поступает сигнал

$$x + y = e^{pt} [1 + W_c(p, t)]. \quad (4.4)$$

Далее, используя формулу (II. 6.17), получаем

$$\begin{aligned} u &= e^{pt} \int_0^T \varphi_1(T, p, t, t - \tau) [1 + W_c(p, \tau)] d\tau = \\ &= e^{pt} \left[\int_0^T \varphi_1(T, p, t, t - \tau) W_c(p, \tau) d\tau + W_1(p, t) \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где φ_1 — СИЧХ элемента 1. Так как сигнал u поступает на АИ-элемент, а интеграл в правой части (5) по t периодичен, то можно полагать по (1.45), что

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{pt} f(p, t_0), \\ f(p, t_0) &= \int_0^T \varphi_1(T, p, t_0, t_0 - \tau) W_c(p, \tau) d\tau + W_1(p, t_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Теперь сразу можно найти y , считая u входом и используя формулу (3.2). Имеем

$$y = e^{pt} W_{yu}(p, t) f(p, t_0), \quad (4.7)$$

где

$$W_{yu}(p, t) = \int_0^T \Phi_2(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau - t_0) d\tau = \\ = W_2(p, t) \circ W_a(p, t - t_0). \quad (4.8)$$

Очевидно, W_{yu} является передаточной функцией разомкнутой импульсной системы со входом u и выходом y . Сравнивая (7) и (3), находим

$$W_c(p, t) = W_{yu}(p, t) f(p, t_0), \quad (4.9)$$

или в развернутом виде

$$W_c(p, t) = \\ = W_{yu}(p, t) \left[\int_0^T \Phi_1(T, p, t_0, t_0 - \tau) W_c(p, \tau) d\tau + W_1(p, t_0) \right]. \quad (4.10)$$

Соотношение (10) представляет собой интегральное уравнение относительно функции $W_c(p, t)$. В данном случае это уравнение легко решается. Для решения уравнения (10) подставим (9) в левую и правую части (10). Тогда получим

$$W_{yu}(p, t) f(p, t_0) = W_{yu}(p, t) \times \\ \times \left[f(p, t_0) \int_0^T \Phi_1(T, p, t_0, t_0 - \tau) W_{uy}(p, \tau) d\tau + W_1(p, t_0) \right]. \quad (4.11)$$

Сокращая это равенство на $W_{yu}(p, t)$, находим

$$f(p, t_0) = \frac{W_1(p, t_0)}{1 - \int_0^T \Phi_1(T, p, t_0, t_0 - \tau) W_{yu}(p, \tau) d\tau}. \quad (4.12)$$

Подставляя это соотношение в (9), находим искомую передаточную функцию:

$$W_c(p, t) = \frac{W_{yu}(p, t) W_1(p, t_0)}{1 - \int_0^T \Phi_1(T, p, t_0, t_0 - \tau) W_{yu}(p, \tau) d\tau}. \quad (4.13)$$

При этом легко убедиться, что интеграл, стоящий в знаменателе формулы (13), представляет собой вычисленную в момент $t=t_0$ передаточную функцию $\tilde{W}(p, t)$ разомкнутой системы, определяемую формулой

$$\tilde{W}(p, t) = W_1(p, t) \circ W_2(p, t) \circ W_a(p, t - t_0). \quad (4.14)$$

Из (13) можно получить важные частные случаи. Если

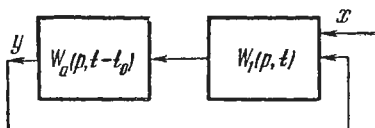


Рис. 12.

в (1) $W_2(p, t) = 1$, т. е. структурная схема системы имеет вид, изображенный на рис. 12, то

$$W_{yu}(p, t) = W_a(p, t - t_0). \quad (4.15)$$

и из (13) имеем

$$W_c(p, t) = \frac{W_a(p, t - t_0) W_1(p, t_0)}{1 - \int_0^T \varphi_1(T, p, t_0, t_0 - \tau) W_a(p, \tau - t_0) d\tau}. \quad (4.16)$$

Если же $W_1(p, t) = 1$ (рис. 13), то вместо (6) имеем

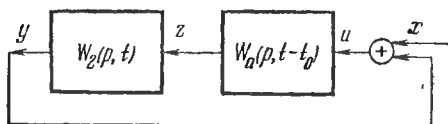


Рис. 13.

$u = x + y$, где x, y даются выражениями (3), и вместо (13) получаем

$$W_c(p, t) = \frac{W_{yu}(p, t)}{1 - W_{yu}(p, t_0)}. \quad (4.17)$$

В дальнейшем мы будем для конкретности рассматривать системы, приведенные к виду, изображенному на рис. 13, и, соответственно, пользоваться формулой (17), как более простой. При этом следует отметить, что к

виду, изображенному на рис. 13, путем соответствующего выбора входа и выхода можно привести любую одноконтурную систему.

Рассмотрим некоторые свойства передаточной функции замкнутой системы (17). Заметим, что из (8) и (1.16) непосредственно следует, что

$$W_{uy}(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(p + ki\omega, t) W_{\phi}(p + ki\omega) e^{k i \omega (t-t_0)}, \quad (4.18)$$

откуда, полагая $t = t_0$, получаем

$$W_{yu}(p, t_0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(p + ki\omega, t_0) W_{\phi}(p + ki\omega). \quad (4.19)$$

Сумма, стоящая в правой части этого равенства, не меняется при замене p на $p + i\omega$; поэтому имеем

$$W_{yu}(p, t_0) = W_{yu}(p + i\omega, t_0), \quad (4.20)$$

т. е. знаменатель передаточной функции (17) имеет по p чисто мнимый период $i\omega$. Поэтому, если ввести в рассмотрение выражение

$$W_{\text{сн}}(p, t) = \frac{W_2(p, t) W_{\phi}(p)}{1 - \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(p + ki\omega, t_0) W_{\phi}(p + ki\omega)} = \frac{W_2(p, t) W_{\phi}(p)}{1 - W_{yu}(p, t_0)}, \quad (4.21)$$

то с учетом (18) и (20) выражение для передаточной функции системы (17) приведет к виду

$$W_{\text{с}}(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, t) e^{k i \omega (t-t_0)}, \quad (4.22)$$

что по форме совпадает с передаточной функцией разомкнутой импульсной системы вида (3.1), передаточная функция приведенной непрерывной части которой имеет вид (21).

Если фазовый сдвиг импульсного элемента равен нулю, т. е. $t_0 = 0$, то из (22) получится

$$W_c(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, t) e^{ki\omega t}, \quad (4.23)$$

что совпадает при $\tau = t$ с СИЧХ разомкнутой системы, имеющей передаточную функцию (21).

Пример 4.1. Рассмотрим систему с обратной связью, полученную замыканием разомкнутой системы (3.47):

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) u, & u &= W_a(p, t) v, \\ v &= W_1(p) z, & z &= (x + y) \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Эта система является частным случаем (1), если положить в соответствии с (II. 6.60)

$$W_1(p, t) = \frac{W_1(p + i\omega)}{2i} e^{i\omega t} - \frac{W_1(p - i\omega)}{2i} e^{-i\omega t}. \quad (4.25)$$

Для того чтобы применить формулу (13), найдем прежде всего СИЧХ, соответствующую передаточной функции (25). Пусть, как обычно,

$$\varphi_1(T, p, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(p + ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)};$$

тогда из (25) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(T, p, t, t - \tau) &= \frac{1}{2i} \varphi_1(T, p + i\omega, t - \tau) e^{i\omega t} - \\ &\quad - \frac{1}{2i} \varphi_1(T, p - i\omega, t - \tau) e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

С учетом (II. 6.49) отсюда получается

$$\begin{aligned} \varphi_1(T, p, t, t - \tau) &= \varphi_1(T, p, t - \tau) \left(\frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2i} \right) = \\ &= \varphi_1(T, p, t - \tau) \sin \omega\tau, \end{aligned} \quad (4.26)$$

что, впрочем, непосредственно следует из (II. 6.50). Теперь передаточную функцию системы (24), используя (13), можно записать в виде

$$W_c(p, t) = \frac{W_{yu}(p, t) W_1(p, 0)}{1 - \int_0^T \varphi_1(T, p, -\tau) \sin \tau W_{yu}(p, \tau) d\tau}, \quad (4.27)$$

причем передаточная функция $W_{yu}(p, t)$ определяется соотношением (8).

Пример 4.2. Найдём передаточную функцию замкнутой одноконтурной импульсной системы, содержащей амплитудно-импульсные элементы I и II рода:

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) u, & u &= f(t) v, \\ v &= W_1(p) z, & z &= W_a(p, t) (y + x), \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где функция $f(t)$ дается выражением (II. 6.61). В данном случае передаточная функция разомкнутой системы, в соответствии с (II. 6.29) и (II. 6.61), равна

$$W_p(p, t) = \int_0^{t_1} \varphi_2(T, p, t - \tau) W_{vx}(p, \tau) d\tau, \quad (4.29)$$

где

$$W_{vx}(p, t) = \int_0^T \varphi_1(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau. \quad (4.30)$$

Поэтому, применяя формулу (17), находим передаточную функцию замкнутой системы

$$W_c(p, t) = \frac{W_p(p, t)}{1 - W_p(p, 0)}. \quad (4.31)$$

Если передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ дробно-рациональные, то выражение (31) можно записать в

конечном виде, используя (3.11) и (II.3.70). Например, если

$$W_1(p) = \frac{1}{p-a}, \quad W_2(p) = \frac{1}{p-b},$$

то после преобразований получится при $m(t) = 1$

$$W_p(p, t) = \begin{cases} -\frac{e^{-pt}}{ab} + \frac{e^{(b-p)t}}{ab} \frac{e^{(b-p)T} e^{-bt_1} - 1}{1 - e^{-(b-p)T}} + \\ + \frac{(1 - e^{-pt_1})}{a(a-b)} \frac{e^{(a-p)t}}{1 - e^{(a-p)T}} + \\ + \frac{(1 - e^{-pT})}{a(a-b)} \frac{e^{(b-p)T} e^{(a-b)t_1} - 1}{(1 - e^{(b-p)T})(1 - e^{(a-p)T})}, & 0 < t < t_1, \\ \frac{e^{(b-p)t}}{1 - e^{(b-p)T}} \left[\frac{e^{-bt_1} - 1}{ab} + \frac{(1 - e^{-pT}) [e^{(a-b)t_1} - 1]}{a(a-b)} \right], & t_1 < t < T. \end{cases} \quad (4.32)$$

Пример 4.3. Аналогичным образом передаточную функцию (31) можно записать в конечном виде, если в цепи (28) имеются элементы чистого запаздывания. Например, если в (28)

$$W_1(p) = \frac{1}{p-a}, \quad W_2(p) = \frac{e^{-p\tau_3}}{p-b}, \quad (4.33)$$

где

$$0 < \tau_3 < T, \quad t_1 < T - \tau_3, \quad \tau_3 < t_1 \quad (4.34)$$

то, используя (II.3.34), найдем, что

$$\varphi_2(T, p, t - \tau) = \tilde{\varphi}_2(T, p, t - \tau + sT),$$

$$-sT < t - \tau - \tau_3 < (1-s)T, \quad s = -2, -1, 0,$$

$$\tilde{\varphi}_2(T, p, t) = \frac{e^{bt}}{1 - e^{(b-p)T}}.$$

В результате выражение (29) сведется к следующему:
 $W_p(p, t) =$

$$= \begin{cases} \int_0^t \tilde{\varphi}(T, p, t - \tau + T) W_{vx}(p, \tau) d\tau, & 0 < t < \tau_3, \\ \int_0^t \tilde{\varphi}(T, p, t - \tau) W_{vx}(p, \tau) d\tau + \\ + \int_t^{t_1} \tilde{\varphi}(T, p, t - \tau + T) W_{vx}(p, \tau) d\tau, & \tau_3 < t < t_1, \\ \int_0^{t_1} \tilde{\varphi}(T, p, t - \tau) W_{vx}(p, \tau) d\tau & t_1 < t < T. \end{cases} \quad (4.35)$$

Пример 4.4. Используя выражение для передаточной функции разомкнутой нисходящей импульсной системы (3.54), найдем передаточную функцию замкнутой системы вида

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) u, & u &= W_{2a}(p, t) v, \\ v &= W_1(p) z, & z &= W_{1a}(p, t) (y + x), \\ W_{1a}(p, t) &= W_{1a}(p, t + T), \\ W_{2a}(p, t) &= W_{2a}(p, t + T_1), & T_1 &= nT. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Применение формулы (17) сразу дает с учетом (3.55)

$$W_c(p, t) = \frac{W_2(p, t) W_1(p, 0)}{1 - W_2(p, 0) W_1(p, 0)}. \quad (4.37)$$

В частности, если имеет место (32), то при $m_1(t) = m_2(t) = 1$

$$\begin{aligned} W_c(p, t) &= [(1 - e^{-pT_1}) e^{(b-p)t} - (1 - e^{(b-p)T_1} e^{-pt_1})] \times \\ &\times [e^{(a-p)T} - e^{-pT}] \{ab[1 - e^{(a-p)T}][1 - e^{(b-p)T_1}] - \\ &- [e^{(a-p)T} - e^{-pT}][e^{(b-p)T_1} - e^{-pT_1}]\}^{-1}, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Используя приведенные выше формулы, путем соответствующего пересчета можно находить передаточные

функции произвольных одноконтурных импульсных систем от любого выхода к любому входу.

Пусть для системы, изображенной на рис. 14, через W_{12} и W_{123} обозначены передаточные функции последовательных цепей, составленных соответственно из элементов с передаточными функциями W_1 , W_2 и W_1 , W_2 ,

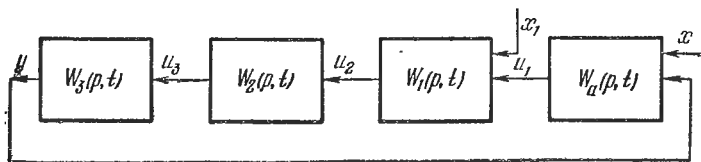


Рис. 14.

W_3 . Через φ_{12} и φ_{123} обозначим соответствующие СИЧХ. Тогда, если $x = e^{pt}$, то по (17)

$$y = W_c(p, t) e^{pt}, \quad (4.39)$$

где

$$W_c(p, t) = \frac{\int_0^T \varphi_{123}(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau}{1 - \int_0^T \varphi_{123}(T, p, 0, -\tau) W_a(p, \tau) d\tau} = \frac{W_p(p, t)}{1 - W_p(p, 0)}. \quad (4.40)$$

Используя выражения (39) и (40), найдем координаты u_1 , u_2 , u_3 в системе, изображенной на рис. 14. Очевидно, как и выше,

$$u_1 = e^{pt} W_a(p, t) [1 + W_c(p, 0)] = \frac{W_a(p, t)}{1 - W_p(p, 0)} e^{pt}. \quad (4.41)$$

После этого по (II.6.28) вычисляются u_2 и u_3 . Имеем

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{\int_0^T \varphi_1(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau}{1 - W_p(p, 0)} e^{pt}, \\ u_3 &= \frac{\int_0^T \varphi_{12}(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau}{1 - W_p(p, 0)} e^{pt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Очевидно, что коэффициенты при e^{pt} в правых частях формул (41), (42) представляют собой передаточные функции от x к соответствующей координате u . Например

$$W_{u, x}(p, t) = \frac{W_a(p, t)}{1 - W_p(p, 0)} \quad (4.43)$$

и т. п. В тех случаях, когда внешнее возбуждение приложено в произвольной точке системы, целесообразно бывает привести его ко входу импульсного элемента, после чего можно воспользоваться приведенными формулами. Например, если воздействие $x_1(t)$ приложено так, как это изображено на рис. 14, то для определения выхода $u_1(t)$ приведем внешнее возбуждение $x_1(t)$ ко входу импульсного элемента. В результате получим схему, изображенную на рис. 15. Эта схема аналогична изображенной на рис. 13. Причем в силу доказанных ранее свойств

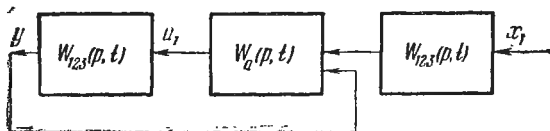


Рис. 15.

импульсного элемента можно полагать его вход равным $e^{pt} W_{123}(p, 0)$. Поэтому, используя формулу (43), сразу получим передаточную функцию от x_1 к u_1 :

$$W_{u_1 x_1}(p, t) = \frac{W_a(p, t)}{1 - W_p(p, 0)} W_{123}(p, 0). \quad (4.44)$$

Аналогичным путем получаем также передаточные функции $W_{u_2 x_1}$ и $W_{u_3 x_1}$, причем следует помнить, что пользоваться эквивалентной схемой, изображенной на рис. 15, в этом случае нельзя. Это следует из того, что внешнее возбуждение можно переносить вдоль цепи лишь тогда, когда при таком перенесении не пересекаются точки съема выходных координат. Если $x_1 = e^{pt}$, то из (44) следует, что

$$u_1 = e^{pt} \frac{W_a(p, t)}{1 - W_p(p, 0)} W_{123}(p, 0),$$

и, следовательно,

$$u_2 = e^{pt} \left[\frac{W_{123}(p, 0)}{1 - W_p(p, 0)} \int_0^T \varphi_1(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau + W_1(p, t) \right].$$

Отсюда вытекает, что

$$W_{u_2 x_1} = \frac{W_{123}(p, 0)}{1 - W_p(p, 0)} \int_0^T \varphi_1(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau + W_1(p, t). \quad (4.45)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$W_{u_3 x_1} = \frac{W_{123}(p, 0)}{1 - W_p(p, 0)} \int_0^T \varphi_{12}(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau + W_{12}(p, t). \quad (4.46)$$

Аналогично можно найти передаточные функции системы, изображенной на рис. 14, от любого входа к любому выходу.

Следует отметить также, что все изложенное выше без существенных изменений можно распространить на одноконтурные системы, содержащие периодические экстраполирующие устройства, рассмотренные в § 2 этой главы. Мы не будем рассматривать этот вопрос в общем виде и проиллюстрируем соответствующий подход на примере простейшей одноконтурной системы.

Пример 4.5. Найдём передаточную функцию системы, полученной замыканием экстраполирующей системы (3.57) со стационарной непрерывной частью

$$y = W(p)z, \quad z = W_s(p, t)(y + x), \quad (4.47)$$

где $W_s(p, t)$ — передаточная функция экстраполятора, имеющая вид (2.14). Полагая, как обычно,

$$x = e^{\lambda t}, \quad y = e^{\lambda t} W_c(\lambda, t), \quad W_c(\lambda, t) = W_c(\lambda, t + T), \quad (4.48)$$

из второго уравнения (47), используя формулу (2.21), получаем

$$z = e^{\lambda t} W_s(\lambda, t) [1 + W_c(\lambda, 0)].$$

Используя это выражение и первое уравнение (47), найдем

$$y = e^{\lambda t} [1 + W_c(\lambda, 0)] \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) W_s(\lambda, \tau) d\tau.$$

Сравнивая это выражение с (48), имеем

$$W_c(\lambda, t) = W_p(\lambda, t) [1 + W_c(\lambda, 0)],$$

где $W_p(\lambda, t)$ — передаточная функция разомкнутой системы, определяемая формулой (3.58).

Из последнего выражения получаем формулу, аналогичную (17):

$$W_c(\lambda, t) = \frac{W_p(\lambda, t)}{1 - W_p(\lambda, 0)}. \quad (4.49)$$

Пример 4.6. Если в системе (47) передаточная функция $W_s(p, t)$ имеет вид (2.16), то по (3.59) и (49)

$$\begin{aligned} W_c(p, t) = & \left\{ \frac{1 - e^{-2pT}}{2T} \int_0^T \varphi(T, p, t - \tau) e^{-p\tau} d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{5 + 2e^{-pT} - e^{-2pT}}{6} \int_0^T \varphi(T, p, t - \tau) e^{-p\tau} d\tau \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1 - e^{2pT}}{2T} \int_0^T \varphi(T, p, -\tau) e^{-p\tau} d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{5 + 2e^{-pT} - e^{-2pT}}{6} \int_0^T \varphi(T, p, -\tau) e^{-p\tau} d\tau \right\}^{-1}, \quad (4.50) \end{aligned}$$

где предполагается, что $W(p, t) = W(p)$.

§ 5. Передаточные функции многоконтурных импульсных систем

Соображения, изложенные в предыдущем параграфе, можно использовать также для построения передаточных функций более сложных систем, например многоконтурных, а также содержащих импульсные элементы, включенные параллельно с непрерывными элементами. По

терминологии, принятой в [103], такие системы называются *непрерывно-импульсными*.

В принципе возможно применение двух подходов:

1) структурные преобразования изучаемой системы, позволяющие свести ее к одноконтурной, после чего возможно применение формул предыдущего параграфа;

2) решение интегрального уравнения для передаточной функции, которое может быть составлено на основании общих соображений § 7 гл. II.

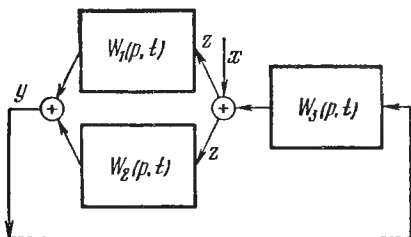


Рис. 16.

Вообще говоря, оба эти подхода равноценны, однако в практических задачах применение интегральных уравнений, по-видимому, быстрее приводит к цели. Ниже на примерах будут проиллюстрированы оба метода.

Приведем сначала один из возможных способов вычислений, позволяющих в принципе преобразовать многоконтурную нестационарную систему к одноконтурной.

Пусть имеется система, содержащая в прямой цепи два параллельных контура (рис. 16):

$$\left. \begin{aligned} y &= [W_1(p, t) + W_2(p, t)] z, & z &= x + W_3(p, t) y, \\ W_i(p, t) &= W_i(p, t + T), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Эти уравнения эквивалентны следующему (см. § 6 гл. II):

$$z = W_3(p, t) \circ [W_1(p, t) + W_2(p, t)] z + x. \quad (5.2)$$

Уравнение (2) может быть разбито на систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} z &= W_3(p, t) \circ W_2(p, t) z + f, \\ f &= W_3(p, t) \circ W_1(p, t) z + x. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Предположим теперь, что нам удалось найти передаточ-

ную функцию замкнутой одноконтурной системы, описываемой уравнением

$$z = W_3(p, t) \circ W_2(p, t) z + f, \quad (5.4)$$

и пусть $W_{zf}(p, t)$ — эта передаточная функция. Тогда уравнение (4) эквивалентно следующему:

$$z = W_{zf}(p, t) f. \quad (5.5)$$

С учетом (5) уравнения (3) принимают вид

$$z = W_{zf}(p, t) f, \quad f = W_3(p, t) \circ W_1(p, t) z + x. \quad (5.6)$$

Уравнения (6) можно рассматривать как уравнения одноконтурной замкнутой системы, изображенной на рис. 17. Если передаточную функцию $W_{zf}(p, t)$ удастся конструктивно построить, то анализ системы (6) может оказаться более простым, чем исследование исходной системы (1).

В частности, если передаточная функция $W_1(p, t)$ соответствует одноконтурной разомкнутой цепи, содержащей в своем составе импульсный элемент, то передаточная функция системы (6) $W_{zx}(p, t)$ может быть определена на основании формул предыдущего параграфа. При этом из (1) будем иметь

$$y = [W_1(p, t) + W_2(p, t)] \circ W_{zx}(p, t) x,$$

т. е. передаточная функция системы (1) будет равна

$$W_{yx}(p, t) = [W_1(p, t) + W_2(p, t)] \circ W_{zx}(p, t). \quad (5.7)$$

Пример 5.1. Найдем передаточную функцию системы, изображенной на рис. 18, где $W_a(p, t)$ — передаточная функция простейшего АИ-элемента.

Если преобразовать эту систему к виду, изображенному на рис. 19, и положить

$$\left. \begin{aligned} \tilde{W}_1(p, t) &= W_2(p) \circ W_a(p, t) W_1(p), \\ \tilde{W}_2(p) &= W_1(p) W_2(p) W_3(p), \\ \tilde{W}_3(p) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

то придем к системе, описываемой уравнениями (1).

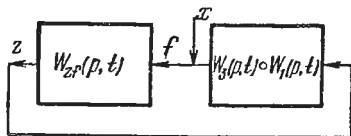


Рис. 17.

Уравнение (4) в данном случае сводится к следующему:

$$z = W_1(p) W_2(p) W_3(p) z + f,$$

т. е.

$$W_{zf}(p) = \frac{1}{1 - W_1(p) W_2(p) W_3(p)},$$

и, следовательно, эквивалентная одноконтурная система (6) имеет вид, изображенный на рис. 20. Передаточная

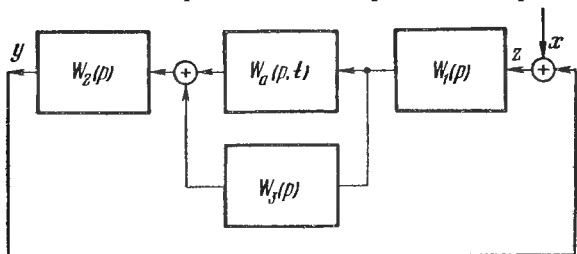


Рис. 18.

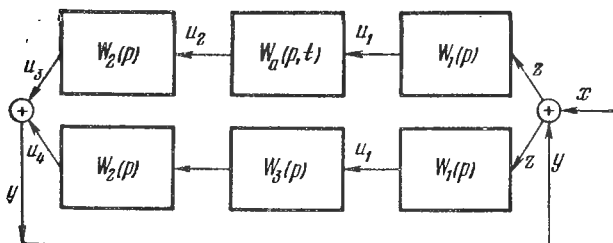


Рис. 19.

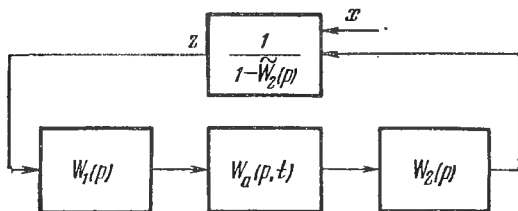


Рис. 20.

функция этой системы, вычисленная по формулам предыдущего параграфа, равна

$$W_{zx}(p, t) = \frac{[W_{zf}(p) W_2(p)] \circ W_a(p, t) W_1(p) W_{zf}(p)}{1 - [(W_1(p) W_{zf}(p) W_2(p)) \circ W_a(p, t)]_{t=0}} + W_{zf}(p). \quad (5.9)$$

Применяя первую формулу (1), получим передаточную функцию исходной системы:

$$W_{yx}(p, t) = [\tilde{W}_1(p, t) + \tilde{W}_2(p)] \circ W_{zx}(p, t). \quad (5.10)$$

Пример 5.2. Найдем передаточную функцию системы, изображенной на рис. 18, применяя соответствующее интегральное уравнение. Для того чтобы найти интегральное уравнение передаточной функции, положим, как обычно,

$$x = e^{pt}, \quad y = W_c(p, t) e^{pt}.$$

Тогда непосредственно по структурной схеме рис. 19 получаем

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= e^{pt} \int_0^T \varphi_1(T, p, t - \tau) z(\tau) d\tau = \\ &= e^{pt} W_1(p) + e^{pt} \int_0^T \varphi_1(T, p, t - \tau) W_c(p, \tau) d\tau, \\ u_4 &= e^{pt} \int_0^T \varphi_{132}(T, p, t - \tau) z(\tau) d\tau = \\ &= e^{pt} W_1(p) W_2(p) W_3(p) + \\ &+ e^{pt} \int_0^T \varphi_{132}(T, p, t - \tau) W_c(p, \tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= e^{pt} [1 + W_c(p, t)], \\ \varphi_{132}(T, p, t - \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(p + ki\omega) \times \\ &\times W_3(p + ki\omega) W_2(p + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}, \\ \varphi_i(T, p, t - \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_i(p + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)} \\ &(i = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Далее, по (3.25) имеем

$$u_2 = e^{pt} u_1(p, 0) W_a(p, t), \quad (5.13)$$

и, следовательно,

$$u_3 = e^{pt} u_1(p, 0) \int_0^T \Phi_2(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau. \quad (5.14)$$

Учитывая, что

$$y(p, t) = u_3(p, t) + u_4(p, t), \quad (5.15)$$

используя соотношения (11) — (14), придем к уравнению

$$W_c(p, t) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) + \int_0^T \Phi_{132}(T, p, t - \tau) W_c(p, \tau) d\tau + c\psi(t), \quad (5.16)$$

где c — неизвестная постоянная (зависящая от p):

$$u_1(p, 0) = c = W_1(p) + \int_0^T \Phi_1(T, p, -\tau) W_c(p, \tau) d\tau, \quad (5.17)$$

и, кроме того,

$$\psi(t) = \int_0^T \Phi_2(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau \quad (5.18)$$

— известная функция. Полагая

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{k i \omega t}, \quad (5.19)$$

$$W_c(p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{ck}(p) e^{k i \omega t} \quad (5.20)$$

и подставляя эти соотношения в (16), получим, приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках в левой и правой частях:

$$W_{c0}(p) = W_1(p) W_3(p) W_2(p) + W_1(p) W_3(p) W_2(p) W_{c0}(p) + c\psi_0, \quad (5.21)$$

$$W_{ck}(p) = W_1(p + k i \omega) W_3(p + k i \omega) W_2(p + k i \omega) W_{ck}(p) + c\psi_k, \quad k \neq 0, \quad (5.22)$$

откуда получаем

$$\left. \begin{aligned} W_{c0}(p) &= \frac{W_1(p) W_2(p) W_3(p)}{1 - W_1(p) W_2(p) W_3(p)} + \\ &\quad + \frac{c\psi_0}{1 - W_1(p) W_2(p) W_3(p)}, \\ W_{ck}(p) &= \frac{c\psi_k}{1 - W_1(p + ki\omega) W_2(p + ki\omega) W_3(p + ki\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Отсюда из (20) получается, что

$$\begin{aligned} W_c(p, t) &= \frac{W_1(p) W_2(p) W_3(p)}{1 - W_1(p) W_2(p) W_3(p)} + \\ &\quad + c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_k e^{ki\omega t}}{1 - W_1(p + ki\omega) W_3(p + ki\omega) W_2(p + ki\omega)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

или в интегральной форме

$$\begin{aligned} W_c(p, t) &= \frac{W_1(p) W_2(p) W_3(p)}{1 - W_1(p) W_2(p) W_3(p)} + \\ &\quad + c \int_0^T \varphi_4(T, p, t - \tau) \psi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_4(T, p, t - \tau) &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ki\omega(t-\tau)}}{1 - W_1(p + ki\omega) W_3(p + ki\omega) W_2(p + ki\omega)}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Если учесть (18), то соотношение (25) можно также представить в виде

$$\begin{aligned} W_c(p, t) &= \frac{W_1(p) W_3(p) W_2(p)}{1 - W_1(p) W_2(p) W_3(p)} + \\ &\quad + c \int_0^T \varphi_5(T, p, t - \tau) W_2(p, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_5(T, p, t - \tau) &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W_2(p + ki\omega)}{1 - W_1(p + ki\omega) W_3(p + ki\omega) W_2(p + ki\omega)} e^{ki\omega(t-\tau)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Теперь для определения искомой передаточной функции остается найти неизвестную постоянную c . Для этого подставим выражение (27) в правую часть (17). В результате после несложных преобразований получим

$$c = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) W_3(p) W_2(p)} + c \int_0^T \varphi_6(T, p, -\tau) W_a(p, \tau) d\tau, \quad (5.29)$$

где

$$\varphi_6(T, p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W_1(p + ki\omega) W_3(p + ki\omega)}{1 - W_1(p + ki\omega) W_3(p + ki\omega) W_2(p + ki\omega)} e^{ki\omega t}, \quad (5.30)$$

т. е.

$$c = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) W_3(p) W_2(p)} \times \times \frac{1}{1 - \int_0^T \varphi_6(T, p, -\tau) W_a(p, \tau) d\tau}. \quad (5.31)$$

Подставляя это выражение в (27), получаем искомую передаточную функцию:

$$W_c(p, t) = \frac{W_1(p) W_3(p) W_2(p)}{1 - W_1(p) W_3(p) W_2(p)} + \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) W_3(p) W_2(p)} \times \times \frac{\int_0^T \varphi_5(T, p, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau}{1 - \int_0^T \varphi_6(T, p, -\tau) W_a(p, \tau) d\tau}. \quad (5.32)$$

Нетрудно убедиться, что полученное выражение совпадает с (10).

§ 6. Переходные процессы в периодических импульсных системах

Для рассмотрения переходных процессов в периодических импульсных системах можно применить общие соображения, изложенные в § 8 гл. II. Однако наличие амплитудно-импульсных элементов в системе придает ей

некоторые дополнительные свойства, которые можно использовать для упрощения получаемых результатов. При этом оказывается удобным использовать установленную выше связь между СИЧХ и $\mathfrak{D}$ -преобразованием.

Из содержания предыдущих параграфов следует, что передаточные функции широкого класса разомкнутых и замкнутых импульсных систем при надлежащем выборе входа и выхода имеют вид

$$W_c(p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, t) e^{k i \omega t}, \quad (6.1)$$

где

$$W_{\text{сн}}(p, t) = W_{\text{сн}}(p, t + T)$$

— передаточная функция эквивалентного приведенного непрерывного элемента. Если вести в рассмотрение СИЧХ этого элемента

$$\varphi_{\text{сн}}(T, p, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, t) e^{k i \omega \tau}, \quad (6.2)$$

то, очевидно,

$$W_c(p, t) = \varphi_{\text{сн}}(T, p, t, t), \quad (6.3)$$

т. е. передаточная функция системы совпадает с СИЧХ эквивалентного приведенного непрерывного элемента, вычисленной при $\tau = t$.

Если (1) действительно имеет место, то изучаемую систему при непрерывных входных сигналах можно рассматривать как простейшую разомкнутую систему, изображенную на рис. 9, для которой передаточной функцией приведенной непрерывной части является $W_{\text{сн}}(p, t)$.

Пусть существует при некотором C

$$g_{\text{сн}}(t, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_{\text{сн}}(p, t) e^{p\xi} dp. \quad (6.4)$$

Тогда весовая функция элемента с передаточной функцией $W_{\text{сн}}(p, t)$ равна

$$h_{\text{сн}}(t, \tau) = g_{\text{сн}}(t, t - \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_{\text{сн}}(p, t) e^{p(t-\tau)} dp. \quad (6.5)$$

Если на систему действует произвольный непрерывный входной сигнал $x(t)$, то, в соответствии с рис. 6, на приведенную непрерывную часть системы действует сигнал

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT). \quad (6.6)$$

Поэтому вынужденная реакция системы на входной сигнал $x(t) = 0$, $t < 0$, при $t \geq 0$ будет иметь вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) h_{\text{ch}}(t, kT) = \sum_{k=0}^{m(t)} x(kT) h_{\text{ch}}(t, kT), \quad (6.7)$$

$$m(t)T < t < [m(t) + 1]T,$$

где $m(t)$ — целая часть отношения $\frac{t}{T}$, или, если перейти к функции $g_{\text{ch}}(t, \xi)$ (4), то

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) g_{\text{ch}}(t, t - kT) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m(t)} x(kT) g_{\text{ch}}(t, t - kT). \quad (6.8)$$

При этом в формулах (7) и (8) предполагается, что выполняются условия физической реализуемости:

$$\left. \begin{aligned} h_{\text{ch}}(t, \tau) &= 0 & \text{при } t < \tau; \\ g_{\text{ch}}(t, \xi) &= 0 & \text{при } \xi < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Если известна весовая функция $h_{\text{ch}}(t, \tau)$ или, что эквивалентно, функция $g_{\text{ch}}(t, \xi)$, то нетрудно найти весовую функцию, соответствующую передаточной функции (1). Действительно, вычисляя обратное преобразование Лапласа от функции (1), имеем

$$g_c(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_c(p, t) e^{p\tau} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega t} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_{\text{ch}}(p + ki\omega, t) e^{p\tau} dp. \quad (6.10)$$

Но из (4) и теоремы смещения следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, t) e^{p\tau} dp = e^{-ki\omega\tau} g_{\text{сн}}(t, \tau). \quad (6.11)$$

Подставляя это выражение в правую часть (10), находим

$$g_c(t, \tau) = g_{\text{сн}}(t, \tau) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega(t-\tau)} = g_{\text{сн}}(t, \tau) \delta_T(t - \tau). \quad (6.12)$$

Заменяя здесь τ на $t - \tau$, находим весовую функцию импульсной системы:

$$h_c(t, \tau) = h_{\text{сн}}(t, \tau) \delta_T(\tau). \quad (6.13)$$

Помимо формул (4) и (5) для вычисления весовой функции $h_{\text{сн}}(t, \tau)$ можно воспользоваться методами $\mathfrak{D}$ -преобразования.

Перейдем к изложению этого способа. Умножая выражение (2) на $e^{p\tau}$, получим

$$\varphi_{\text{сн}}(T, p, t, \tau) e^{p\tau} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, t) e^{(p+ik\omega)\tau}, \quad (6.14)$$

но, в соответствии со [103], в правой части этого равенства стоит $\mathfrak{D}$ -преобразование передаточной функции $W_{\text{сн}}(p, t)$, т. е.

$$\varphi_{\text{сн}}(T, p, t, \tau) e^{p\tau} = \mathfrak{D}[W_{\text{сн}}(p, t), \tau], \quad (6.15)$$

где $\mathfrak{D}[W_{\text{сн}}(p, t), \tau]$ означает ряд, стоящий в правой части (14), и где величина t рассматривается как параметр. С другой стороны, как следует из [103], если $F(p) = = L[f(t)]$, то функция $f(t)$ определяется через $\mathfrak{D}[F(p), \tau]$ следующим образом:

$$f(kT + \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-\frac{i\omega}{2}}^{C+\frac{i\omega}{2}} \mathfrak{D}[F(p), \tau] e^{p k T} dp, \quad 0 < \tau < T, \quad (6.16)$$

где постоянная C может быть взята той же, что в (4).

Но в рассматриваемом случае из (4) следует, что

$$W_{\text{сн}}(p, t) = L_{\tau} [g_{\text{сн}}(t, \tau)], \quad (6.17)$$

где индекс τ означает, что преобразование Лапласа берется по переменной τ . Поэтому, используя (15) и (16), получаем, что

$$\begin{aligned} g_{\text{сн}}(t, \tau + kT) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C - \frac{i\omega}{2}}^{C + \frac{i\omega}{2}} \Phi_{\text{сн}}(T, p, t, \tau) e^{p(\tau + kT)} dp, \quad 0 < \tau < T. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Полагая в (18) $\tau + kT = u$, придем также к более простому по форме соотношению:

$$g_{\text{сн}}(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C - \frac{i\omega}{2}}^{C + \frac{i\omega}{2}} \Phi_{\text{сн}}(T, p, t, u) e^{pu} dp, \quad (6.19)$$

так как

$$\Phi_{\text{сн}}(T, p, t, u - kT) = \Phi_{\text{сн}}(T, p, t, u).$$

Подынтегральное выражение в (18) периодически по p с периодом $i\omega$ и, как следует из теории $\mathfrak{D}$ -преобразования, является функцией величины $z = e^{pT}$. Поэтому, переходя в (18) к переменной z , получаем

$$g_{\text{сн}}(t, \tau + kT) = \frac{1}{2\pi iT} \oint \left[\Phi_{\text{сн}}\left(T, \frac{1}{T} \ln z, t, \tau\right) z^{\tau/T} \right] z^{k-1} dz, \quad (6.20)$$

где путь интегрирования в плоскости z является окружностью радиуса C . Если к интегралу (20) применима теорема о вычетах, то из (20) получим [103]

$$g_{\text{сн}}(t, \tau + kT) = \sum_{\nu} \text{Res}_{e^{p_{\nu}T}} [\Phi_{\text{сн}}(T, p, t, \tau) e^{p(\tau + kT)}], \quad (6.21)$$

где p_{ν} — полюсы $\Phi_{\text{сн}}(T, p, t, \tau)$.

В некоторых задачах вычисление по формуле (20) оказывается более простым, чем вычисление интеграла (4). В других задачах может иметь место обратная ситуация.

Аналогичным образом решается задача о вычислении реакции импульсной системы на произвольное входное воздействие $x(t)$. Если $X(p) = L[x(t)]$, то по общей формуле (II. 8.4)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} W_c(p, t) X(p) e^{pt} dp; \quad (6.22)$$

нетрудно показать, что формула (22) эквивалентна (7), (8).

Вместо соотношения (22) можно использовать и обратное $\mathfrak{D}$ -преобразование. Для этого вычислим величину

$$D[y(t), \tau] = \sum_{s=0}^{\infty} y(sT + \tau) e^{-psT} = \mathfrak{D}[Y(p), \tau], \quad (6.23)$$

где $y(t)$ определяется соотношением (8), $Y(p) = L[y(t)]$. Но из (8) имеем

$$y(sT + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) g_{\text{ch}}[\tau, (s-k)T + \tau], \quad (6.24)$$

где в силу периодичности системы

$$g_{\text{ch}}[sT + \varepsilon, \tau] = g_{\text{ch}}[\varepsilon, \tau]. \quad (6.25)$$

Подставляя (24) в (23), получим

$$\mathfrak{D}[Y(p), \tau] = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-psT} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) g_{\text{ch}}[\tau, (s-k)T + \tau].$$

Полагая здесь $s-k=r$ и меняя порядок суммирования, найдем

$$\mathfrak{D}[Y(p), \tau] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \sum_{r=-k}^{\infty} g_{\text{ch}}[\tau, rT + \tau] e^{-pkT} e^{-prT}.$$

Но в силу условия физической реализуемости

$$g_{\text{ch}}(\tau, rT + \tau) = 0 \quad \text{при} \quad r < 0,$$

так как $0 \leq \tau < T$. Поэтому последнее выражение для $\mathfrak{D}[Y(p), \tau]$ дает

$$\mathfrak{D}[Y(p), \tau] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT} \sum_{r=0}^{\infty} g_{\text{ch}}[\tau, \tau + rT] e^{-prT}. \quad (6.26)$$

Введем для первого ряда, стоящего в правой части этого равенства, обозначение

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-p k T} = \mathfrak{D}[X, 0] = D[x(t), p]. \quad (6.27)$$

Сумма второго ряда, в соответствии с (II.6.22), равна

$$\sum_{r=0}^{\infty} g_{\text{сн}}(\tau, \tau + rT) e^{-p r T} = \Phi_{\text{сн}}[T, p, \tau, \tau] e^{p \tau}. \quad (6.28)$$

Подставляя два последних равенства в (26) и учитывая (3), получаем интересующее нас выражение:

$$\mathfrak{D}[Y(p), \tau] = \mathfrak{D}(x, 0) W_c(p, \tau) e^{p \tau}. \quad (6.29)$$

Применяя теперь формулу (16), находим

$$y(\tau + kT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - \frac{i\omega}{2}}^{c + \frac{i\omega}{2}} \mathfrak{D}(X, 0) W_c(p, \tau) e^{p(\tau + kT)} dp, \quad 0 \leq \tau < T. \quad (6.30)$$

Полагая здесь

$$\tau = t - kT$$

и учитывая, что

$$W_c(p, t) = W_c(p, t - kT),$$

окончательно получаем выражение

$$y(t) = \int_{c - \frac{i\omega}{2}}^{c + \frac{i\omega}{2}} \mathfrak{D}(X, 0) W_c(p, t) e^{p t} dp, \quad (6.31)$$

которое не зависит от k .

При практических вычислениях, если известно замкнутое выражение для $W_c(p, t)$ при $0 < t < T$, удобнее пользоваться формулой (22). Если же $W_c(p, t)$ дается бесконечным рядом, то предпочтительней пользоваться формулой (31) [25]. Для фактического вычисления интегралов (22) или (31) можно использовать все класси-

ческие методы теории импульсных систем: переход к переменной z , метод степенных рядов и т. п.

Полученные выше формулы показывают, что в принципе задача построения переходных процессов рассматриваемого класса нестационарных импульсных систем не отличается от аналогичной задачи для стационарных импульсных систем и решается с помощью тех же приемов, если только считать аргумент t передаточной функции независимым параметром.

§ 7. Устойчивость периодических импульсных систем. Построение характеристического уравнения

При анализе устойчивости линейных периодических систем в § 9 гл. II предполагалось, что весовая функция системы является обыкновенной функцией своих аргументов. Как следует из предыдущего рассмотрения, в случае импульсных систем это предположение, вообще говоря, не выполняется. Поэтому вопрос об устойчивости импульсных систем должен быть рассмотрен особо. В то же время основной результат о связи между устойчивостью нестационарной системы и устойчивостью соответствующей «замороженной» системы остается справедливым и в рассматриваемом случае. Пусть имеем нестационарную периодическую импульсную систему

$$y = W_c(p, t)x, \quad (7.1)$$

где передаточная функция системы $W_c(p, t)$ дается выражением (6.1). Пусть на предварительно невозбужденную систему (1) при $t \geq 0$ воздействует ограниченный по модулю входной сигнал $x(t)$, $|x(t)| < d = \text{const}$. Тогда, как и в § 9 гл. II, систему (1) будем называть *устойчивой*, если выполнено условие (II. 9.2), т. е.

$$|y(t)| \leq df, \quad (7.2)$$

где постоянная f не зависит от вида входного сигнала $x(t)$.

Пусть $h_{\text{сн}}(t, \tau)$, весовая функция эквивалентного непрерывного элемента, является обыкновенной функцией своих аргументов и $g_{\text{сн}}(t, \tau) = h_{\text{сн}}(t, t - \tau)$. Имеет место

следующее утверждение: для устойчивости системы (1) в указанном смысле необходимо и достаточно выполнения условия

$$\max_t I(t) \leq f, \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{k=0}^{m(t)} |h_{\text{сн}}(t, kT)| = \\ &= \sum_{k=0}^{m(t)} |g_{\text{сн}}(t, t - kT)|, \quad mT < t < (m+1)T. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В основе доказательства лежат равенства (6.7), (6.8):

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{m(t)} x(kT) h_{\text{сн}}(t, kT) = \\ &= \sum_{k=0}^{m(t)} x(kT) g_{\text{сн}}(t, t - kT), \quad mT < t < (m+1)T. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Пусть условие (3) выполнено; тогда из (4) имеем при любом m и $mT \leq t < (m+1)T$

$$|y(t)| \leq \sum_{k=0}^{m(t)} |x(kT)| |h_{\text{сн}}(t, kT)| \leq d \sum_{k=0}^{m(t)} |h_{\text{сн}}(t, kT)| \leq df,$$

т. е. система устойчива, откуда и следует достаточность условия (3).

Для доказательства необходимости предположим обратное: пусть условие (3) нарушено, но устойчивость имеет место, т. е. выполнено условие (2). Покажем, что такое предположение приводит к противоречию. Действительно, если (3) не выполняется, то для любого $f_1 > f$ найдется такое значение $t = t_1$, $s(t_1)T < t_1 < [m(t_1) + 1]T$, что

$$\sum_{k=0}^{m(t_1)} |h_{\text{сн}}(t_1, kT)| \geq f_1 > f.$$

Но тогда, полагая

$$x(kT) = d \operatorname{sign} h_{\text{сн}}(t_1, kT).$$

из (5) получим

$$\begin{aligned} y(t_1) &= d \sum_{k=0}^{m(t_1)} \operatorname{sign} h_{\text{сн}}(t_1, kT) h_{\text{сн}}(t_1, kT) = \\ &= d \sum_{k=0}^{m(t_1)} |h_{\text{сн}}(t_1, kT)| \geq df_1 > df, \end{aligned}$$

что противоречит (2). Полученное противоречие и доказывает необходимость условия (3) для устойчивости.

Дополнительно к приведенному доказательству сделаем ряд важных замечаний.

1. Полагая

$$t = \tau + mT, \quad (7.6)$$

второе выражение для $I(t)$ (4) можно представить в виде

$$I(t, \tau) = \sum_{k=0}^{m(t)} |g_{\text{сн}}(t, \tau + kT)|, \quad (7.7)$$

$$mT < t < (m+1)T, \quad 0 < \tau < T.$$

Допустим теперь, что при каждом τ , $0 < \tau < T$, сходится ряд

$$I_1(t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} |g_{\text{сн}}(t, \tau + kT)|, \quad (7.8)$$

причем сумма его ограничена равномерно относительно t , т. е.

$$I_1(t, \tau) \leq f;$$

тогда, очевидно, и

$$I(t) \leq f, \quad (7.9)$$

т. е. выполнено условие (3), и система устойчива.

Таким образом, выполнение неравенства

$$I_1(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_{\text{сн}}(t, \tau + kT)| \leq f, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad (7.10)$$

является достаточным (но не необходимым) условием устойчивости системы (1).

2. Приведенные критерии устойчивости фактически не используют факта периодичности системы и

используют только равенства (5). Поэтому (4) является необходимым и достаточным условием устойчивости произвольной системы, для которой связь между входом и выходом дается формулой (5).

3. В общем случае для устойчивости недостаточно, чтобы ряды в условиях (10) сходились при любом t . Необходимо также, чтобы сумма этих рядов $I(t, \tau)$, являющаяся функцией параметров t, τ , была ограниченной функцией t на всей полуоси $t > 0$.

Установим теперь связь между устойчивостью нестационарной системы (1) и устойчивостью стационарной импульсной системы, полученной из (1) «замораживанием» передаточной функции. Это в принципе делается так же, как и в § 9 гл. II.

Именно, нетрудно заметить, что условие сходимости ряда (при фиксированном α)

$$I_1(\alpha, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} |g_{\text{сн}}(\alpha, \tau + kT)| \quad (7.11)$$

есть условие устойчивости стационарной импульсной системы

$$\left. \begin{aligned} y &= \tilde{W}_c(p, t, \alpha) x, \\ \tilde{W}_c(p, t, \alpha) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\text{сн}}(p + ki\omega, \alpha) e^{kit\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

полученной из (1) при замене $W_{\text{сн}}(p, t)$ на $W_{\text{сн}}(p, \alpha)$. Поэтому устойчивость «замороженной» системы (12) при всех α есть необходимое условие для выполнения критерия устойчивости нестационарной импульсной системы (10). Если же «замороженная» система устойчива при всех α и

$$I_1(\alpha, \tau) < f,$$

то выполнено (10), и нестационарная система (1) устойчива. Но для устойчивости «замороженной» системы необходимо [103], чтобы при всех α особые точки функции

$$\mathfrak{D}[W_{\text{сн}}(p, \alpha), t] = \tilde{W}_c(p, t, \alpha) \quad (7.13)$$

имели отрицательные вещественные части или, что эквивалентно, чтобы при всех α имели отрицательные ве-

вещественные части особые точки «замороженной» передаточной функции $W_c(p, t, \alpha)$. В дальнейшем будем предполагать, что передаточная функция $W_c(p, t)$ имеет только особые точки типа полюса. Тогда можно утверждать, что для выполнения критерия устойчивости импульсной системы (10) необходимо, чтобы полюсы p_k ее передаточной функции имели отрицательные вещественные части, т. е.

$$\operatorname{Re} p_k < 0. \quad (7.14)$$

Кроме того, в общем случае для устойчивости требуется еще выполнение ряда дополнительных условий, которые всегда можно проверить, имея передаточную функцию системы. Однако для широкого круга линейных периодических импульсных систем условие (14) или несколько усиленное условие

$$\operatorname{Re} p_k < \alpha < 0, \quad (7.15)$$

где α — сколько угодно малая положительная постоянная, являются не только необходимыми, но и достаточными для устойчивости. Для исследования устойчивости систем, обладающих такими свойствами, нет необходимости вычислять передаточную функцию системы, а достаточно ограничиться анализом расположения полюсов передаточной функции относительно мнимой оси. При этом исследование обычно сводится к рассмотрению некоторого уравнения, которому удовлетворяют эти полюсы. Ниже такое уравнение называется *характеристическим*. Используя специфические свойства импульсных элементов, можно предложить простой способ построения характеристического уравнения для широкого класса импульсных систем, который излагается ниже.

Перейдем к рассмотрению практических приемов построения характеристического уравнения для различных типов импульсных систем. В основе этих приемов лежит тот факт, что если p_k — полюс передаточной функции линейной периодической системы, то в отсутствие внешнего возбуждения на ее выходе возможно появление сигнала вида

$$y = e^{p_k t} y_n(t), \quad y_n(t) = y_n(t + T), \quad (7.16)$$

т. е. полюсы передаточной функции являются характеристическими показателями системы.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим сначала простейшую одноконтурную импульсную систему, изображенную на рис. 21 и имеющую уравнения

$$y = W(p, t) x, \quad x = W_a(p, t - t_0) y, \quad W(p, t) = W(p, t + T). \quad (7.17)$$

Пусть передаточная функция импульсного элемента имеет вид (1.38) и координата $y(t)$ предполагается непрерывной.

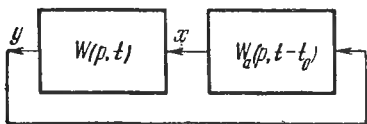


Рис. 21.

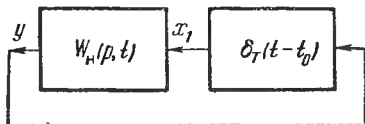


Рис. 22.

Если воспользоваться представлением АИ-элемента (1.39), то вместо уравнений (17) можно написать

$$y = W_n(p, t) x_1, \quad x_1 = \delta_T(t - t_0) y, \quad (7.18)$$

где

$$W_n(p, t) = W(p, t) W_\Phi(p) \quad (7.19)$$

и $W_\Phi(p)$ — передаточная функция формирующего элемента. Уравнениям (18) соответствует структурная схема, изображенная на рис. 22.

Предположим теперь, что в уравнениях (18) координата $y(t)$ определяется соотношениями (16); тогда

$$x_1 = e^{\lambda t} x_n(t), \quad x_n(t) = \delta_T(t - t_0) y_n(t), \quad (7.20)$$

причем в силу периодичности $y_n(t)$ имеем также

$$\delta_T(t - t_0) y_n(t) = y_n(t_0) \delta_T(t - t_0). \quad (7.21)$$

Если использовать формулу (II. 4.36), то с помощью (21), (16) и (20) уравнения (18) сведутся к

$$y_n(t) = W_n(p + \lambda, t) x_n(t), \quad x_n(t) = y_n(t_0) \delta_T(t - t_0). \quad (7.22)$$

Уравнения (22) формально соответствуют некоторой эквивалентной разомкнутой системе (рис. 23). Поэтому по (II, 6.14) из (22) сразу получаем

$$y_n(t) = \Phi_n(T, \lambda, t, t - t_0) y_n(t_0), \quad (7.23)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n(T, \lambda, t, \tau) = \\ = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) W_{\Phi}(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega\tau} \end{aligned} \quad (7.24)$$

— СИЧХ приведенной непрерывной системы. Как следует из (3.4) и (3.3)

$$\varphi_n(T, \lambda, t, t - t_0) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) W_a(\lambda, \tau - t_0) d\tau, \quad (7.25)$$

где

$$\varphi(T, \lambda, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega\tau} \quad (7.26)$$

— СИЧХ непрерывного элемента системы (17).

К соотношению (23) можно прийти и непосредственно из уравнений (17), не вводя явно формирующего элемента. Действительно, если на вход импульсного элемента действует сигнал (16), то, поскольку импульсный элемент реагирует только на значения входного сигнала в

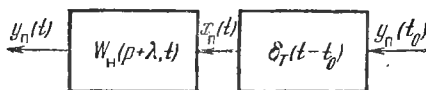


Рис. 23.

моменты $t = kT$, можно вместо (16) рассматривать входной сигнал вида

$$y(t) = e^{\lambda t} y_n(t_0). \quad (7.27)$$

Тогда выходной сигнал импульсного элемента, в соответствии с (1.46), представится в виде

$$x(t) = e^{\lambda t} W_a(\lambda, t - t_0) y_n(t_0). \quad (7.28)$$

Находя с помощью (II. 6.14) реакцию непрерывной части системы (17) на внешнее возбуждение (28), мы снова придем к соотношению (23). Такой порядок вычислений в некоторых случаях является более предпочтительным.

Равенство (23) должно, в частности, выполняться при $t = t_0$. Полагая в (23) $t = t_0$, имеем

$$y_n(t_0) [1 - \varphi_n(T, \lambda, t_0, 0)] = 0,$$

откуда следует

$$1 - \varphi_n(T, \lambda, t_0, 0) = 0. \quad (7.29)$$

Это соотношение и является искомым характеристическим уравнением. С учетом (25) характеристическое уравнение (29) можно переписать в виде

$$1 - \int_0^T \varphi(T, \lambda, t_0, t_0 - \tau) W_a(\lambda, \tau - t_0) d\tau = 0. \quad (7.30)$$

Легко убедиться, что выражение, стоящее в левой части

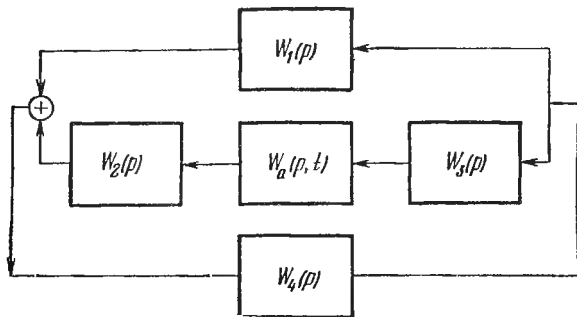


Рис. 24.

характеристического уравнения (30), совпадает со знаменателем передаточной функции системы рис. 13, которая определена в § 4 (формула (4.17)). Аналогично можно рассмотреть и более общие случаи.

Нетрудно убедиться, что левая часть характеристического уравнения (30) периодична по переменной p с чисто мнимым периодом $i\omega$. Это следует, например, из (24), так как, полагая в этой формуле $t = t_0$, $\tau = 0$, имеем

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_n(T, \lambda, t_0, 0) &= \\ &= 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t_0) W_\phi(\lambda + ki\omega), \end{aligned} \quad (7.31)$$

причем правая часть этого равенства не меняется при замене λ на $\lambda + i\omega$.

Покажем теперь, как изложенный подход применяется для построения характеристического уравнения импульсно-непрерывной системы, непрерывные элементы которой стационарны. Пусть структурная схема системы имеет вид, изображенный на рис. 24, причем $t_0 = 0$. Если выделить формирующий элемент, то рассматриваемую систему можно свести к одноконтурной, изображенной на рис. 22, где

$$\left. \begin{aligned} W_H(p, t) &= W_H(p) = W_L(p) W_\Phi(p), \\ W_L(p) &= \frac{W_2(p) W_3(p) W_4(p)}{1 - W_1(p) W_4(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Поэтому, используя (30), сразу можно написать характеристическое уравнение системы, изображенной на рис. 24:

$$1 - \int_0^T \varphi_L(T, \lambda, -\tau) W_a(\lambda, \tau) d\tau = 0, \quad (7.33)$$

где

$$\varphi_L(T, \lambda, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_L(\lambda + kl\omega) e^{kl\omega\tau}.$$

С помощью аналогичных соображений можно построить характеристические уравнения и для некоторых

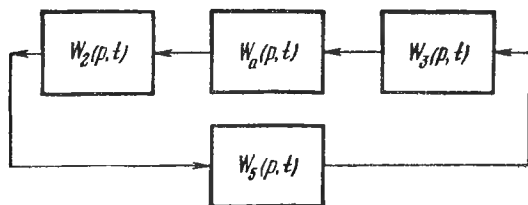


Рис. 25.

классов импульсно-непрерывных систем с нестационарными непрерывными элементами. Например, если рассмотреть систему, аналогичную изображенной на рис. 24, но нестационарную, где все передаточные функции $W_i = W_i(p, t)$ зависят от t и имеют по t период T , то ее,

в принципе, можно свести к одноконтурной системе, изображенной на рис. 25, где $W_5(p, t)$ будет передаточной функцией замкнутой цепи, изображенной на рис. 26. Если удастся построить эту передаточную функцию $W_H(p, t)$, то характеристическое уравнение получится путем использования (30) или (31).

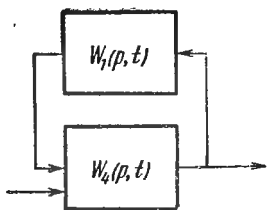


Рис. 26.

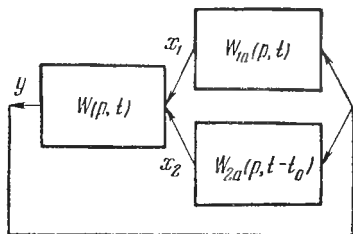


Рис. 27.

Практически при известных передаточных функциях $W_i(p, t)$ передаточную функцию $W_H(p, t)$ можно построить, пользуясь формулами § 6 гл. II, если только удастся найти передаточную функцию имеющегося на рис. 26 замкнутого контура. Это, в частности, всегда

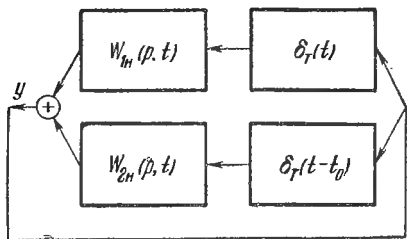


Рис. 28.

возможно, если элементы с передаточными функциями W_1 и W_4 стационарные; тогда вместо системы рис. 24 получим разомкнутую цепь рис. 23. Передаточная функция $W_H(p, t)$ при этом непосредственно может быть вычислена путем применения формул § 6 гл. II.

Аналогичным образом строится характеристическое уравнение, если система содержит несколько импульсных элементов, в том числе работающие несинфазно. Пусть, например, имеем систему, изображенную на рис. 27, где

$W_{1a}(p, t)$ имеет вид (1.7), а $W_{2a}(p, t - t_0)$ — вид (1.37) и функция $y(t)$ непрерывна. Вводя формирующие элементы, получим систему, изображенную на рис. 28. Поэтому, полагая, как и выше, $y = e^{\lambda t} y_{\Pi}(t)$, $y_{\Pi}(t) = y_{\Pi}(t + T)$, придем формально к разомкнутой системе

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= W_{1\Pi}(p + \lambda, t) x_{1\Pi} + W_{2\Pi}(p + \lambda, t) x_{2\Pi}, \\ x_{1\Pi} &= \delta_T(t) y_{\Pi}(0), \quad x_{2\Pi} = \delta_T(t - t_0) y_{\Pi}(t_0), \\ W_{1\Pi}(p, t) &= W(p, t) W_{1\Phi}(p), \\ W_{2\Pi}(p, t) &= W(p, t) W_{2\Phi}(p), \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

где $W_{1\Phi}(p)$, $W_{2\Phi}(p)$ — передаточные функции соответствующих формирующих элементов. При этом, аналогично предыдущему,

$$y_{\Pi}(t) = \Phi_{1\Pi}(T, \lambda, t, t) y_{\Pi}(0) + \Phi_{2\Pi}(T, \lambda, t, t - t_0) y_{\Pi}(t_0), \quad (7.35)$$

где

$$\Phi_{i\Pi}(T, \lambda, t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{i\Pi}(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega\tau}, \quad i = 1, 2,$$

или, что эквивалентно,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1\Pi}(T, \lambda, t, t) &= \int_0^T \Phi(T, \lambda, t, t - \tau) W_{1a}(\lambda, \tau) d\tau, \\ \Phi_{2\Pi}(T, \lambda, t, t - t_0) &= \\ &= \int_0^T \Phi(T, \lambda, t, t - \tau) W_{2a}(\lambda, \tau - t_0) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Полагая в (35) $t = 0$ и $t = t_0$, находим

$$\begin{aligned} y_{\Pi}(0) [1 - \Phi_{1\Pi}(T, \lambda, 0, 0)] - y_{\Pi}(t_0) \Phi_{2\Pi}(T, \lambda, 0, -t_0) &= 0, \\ -y_{\Pi}(0) \Phi_{1\Pi}(T, \lambda, t_0, t_0) + y_{\Pi}(t_0) [1 - \Phi_{2\Pi}(T, \lambda, t_0, 0)] &= 0. \end{aligned}$$

Условием совместности этих уравнений является

$$d(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1 - \Phi_{1\Pi}(T, \lambda, 0, 0) & -\Phi_{2\Pi}(T, \lambda, 0, -t_0) \\ -\Phi_{1\Pi}(T, \lambda, t_0, t_0) & 1 - \Phi_{2\Pi}(T, \lambda, t_0, 0) \end{vmatrix} = 0, \quad (7.37)$$

что и представляет собой искомое характеристическое уравнение.

Покажем, что определитель, фигурирующий в соотношениях (37), периодичен по λ с периодом $i\omega$, т. е.

$$d(\lambda) = d(\lambda + i\omega). \quad (7.38)$$

Для этого заметим, что из (II.6.49) и (36) следует

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1H}(T, \lambda, 0, 0) &= \Phi_{1H}(T, \lambda + i\omega, 0, 0), \\ \Phi_{2H}(T, \lambda, t_0, 0) &= \Phi_{2H}(T, \lambda + i\omega, t_0, 0), \\ \Phi_{1H}(T, \lambda + i\omega, t_0, t_0) &= e^{-i\omega t_0} \Phi_{1H}(T, \lambda, t_0, t_0), \\ \Phi_{2H}(T, \lambda + i\omega, 0, -t_0) &= e^{i\omega t_0} \Phi_{2H}(T, \lambda, 0, -t_0). \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Подставляя эти значения в определитель (37), сразу приходим к соотношению (38). Поэтому характеристическое уравнение фактически является уравнением относительно неизвестной $z = e^{\lambda T}$.

Все сказанное непосредственно обобщается на многомерные системы. Например, в уравнениях (17) и на структурной схеме рис. 21 можно считать, что X, Y — векторы, а $W(p, t)$, $W_a(p, t)$ — передаточные матрицы соответствующих размеров. При этом, дословно повторяя выкладки, приводящие к равенству (23), получим

$$Y_H(\lambda, t) = \Phi_H(T, \lambda, t, t) Y(\lambda, 0), \quad (7.40)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_H(T, \lambda, t, \tau) &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) W_\Phi(\lambda + ki\omega) e^{kti\omega\tau}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

и $W_\Phi(p)$ — соответствующая формирующая матрица. Из (40), полагая $t = 0$, получаем соответствующее условие совместности

$$\det |E - \Phi_H(T, \lambda, 0, 0)| = 0, \quad (7.42)$$

где кроме (41), аналогично (24) и (25), можно использовать соотношения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_H(T, \lambda, 0, 0) &= \int_0^T \Phi(T, \lambda, 0, -\tau) W_a(\lambda, \tau) d\tau, \\ \Phi(T, \lambda, t, \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega, t) e^{kti\omega\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Можно показать, что в общем случае для произвольной линейной периодической импульсной системы левая часть характеристического уравнения получается периодической относительно λ с периодом $i\omega$. Поэтому, вводя переменную $z = e^{\lambda T}$, можно всегда прийти к уравнению относительно переменной z , которое в большинстве практических случаев оказывается более простым. При этом, если z_i — корни характеристического уравнения относительно переменной z , то условия (15) сведутся к неравенствам

$$|z_i| < \beta < 1. \quad (7.44)$$

Как следует из предыдущего, в общем случае выполнения условий (15) или (44) недостаточно для устойчивости. Однако для большинства систем, встречающихся в практике автоматического управления, условия (15) или (44) оказываются все же достаточными для устойчивости. Например, таким же способом, как в [25], можно доказать, что условия (44) являются достаточными для устойчивости, если подынтегральное выражение в (6.4) удовлетворяет условиям применимости теоремы о вычетах.

В заключение отметим, что возможен иной подход к исследованию устойчивости импульсной системы, основанный на непосредственном рассмотрении передаточной функции эквивалентного непрерывного элемента $W_{\text{сн}}(p, t)$. Пусть, например, функция $g_{\text{сн}}(t, \xi)$, определенная формулой (6.4), удовлетворяет неравенству

$$g_{\text{сн}}(t, \xi) \leq Ce^{-\alpha\xi}, \quad \alpha > 0. \quad (7.45)$$

Тогда, очевидно, условие устойчивости импульсной системы (10) выполнено. Поэтому, если эквивалентный непрерывный элемент является фильтрующим, то установить факт выполнения (45) и, следовательно, устойчивости импульсной системы (1) можно по передаточной функции $W_{\text{сн}}(p, t)$ на основании соображений § 9 гл. II, а также § 5 гл. III.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ
КОММУТАЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ**Вводные замечания**

В главе изучаются линейные системы с коммутацией параметров, т. е. системы, содержащие в своем составе помимо линейных стационарных элементов безынерционные усилители с переменными кусочно-постоянными коэффициентами усиления. Формально такие системы могут быть заданы некоторой последовательностью передаточных функций, не зависящих от времени. В главе, однако, показывается на примере, что такой подход в общем случае некорректен и для полного описания системы с коммутацией параметров необходимо задать ее структуру. Для исследования общих свойств систем рассматриваемого класса в главе используется аппарат интегральных уравнений, вывод которых дан в § 1 и § 2. В § 2 также изложен общий способ построения переходных процессов, основанный на решении соответствующего уравнения Вольтерра, напоминающий классический метод припасовывания, но более универсальный и применимый для исследования систем с распределенными параметрами.

В последующих параграфах главы рассматриваются системы с периодической коммутацией параметров при дополнительном предположении о том, что стационарные элементы, входящие в систему, имеют сосредоточенные параметры, т. е. их передаточные функции дробно-рациональны. В этом случае решение всех задач, связанных с динамикой системы, можно провести в замкнутой форме, хотя и достаточно громоздкой. В заключительном, седьмом, параграфе главы изложен общий способ исследования систем с амплитудно-импульсной модуляцией I и II рода.

§ 1. Интегральные уравнения одноконтурных систем с периодической коммутацией параметров

В настоящей главе изучается один важный класс линейных периодических систем — системы, параметры которых, периодически меняясь, поочередно принимают различные постоянные значения. Такие системы называют *системами, параметры которых меняются периодически скачком*, или *системами с периодической коммутацией параметров*. Будем далее придерживаться последнего термина.

Системам рассматриваемого класса посвящена значительная литература. В настоящей главе системы с периодической коммутацией параметров рассматриваются на основе общей теории линейных периодических систем, изложенной в гл. II.

Простейшим, но достаточно общим примером системы рассматриваемого класса является система, структурная схема которой изображена на рис. 29.

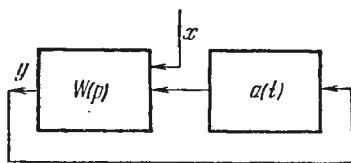


Рис. 29.

Уравнения этой системы имеют вид

$$y = W(p) z, \quad z = a(t) y + x, \quad (1.1)$$

где $W(p)$ — передаточная функция стационарной части системы, а функция $a(t)$ — периодическая и кусочно-постоянная, т. е.

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad a(t) = a(t + T), \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

причем $t_0 = 0$, $t_m = T$ и среди чисел a_i могут быть и равные.

Найдем установившуюся реакцию системы (1) на внешнее возбуждение вида

$$x(t) = e^{\lambda t} x_{\text{п}}(t), \quad x_{\text{п}}(t) = x_{\text{п}}(t + T). \quad (1.3)$$

Для этого полагаем, как в § 7 гл. II,

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda t} y_{\text{п}}(t), \quad z(t) = e^{\lambda t} z_{\text{п}}(t), \quad y_{\text{п}}(t) = y_{\text{п}}(t + T), \\ z_{\text{п}}(t) &= z_{\text{п}}(t + T). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Тогда из уравнений (1) так же, как и при выводе уравнения (II. 7.6), сразу получим

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) a(\tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau, \quad (1.5)$$

где

$$\varphi(T, \lambda, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega t} \quad (1.6)$$

— СИЧХ стационарной части системы.

В общем случае уравнение (5) является уравнением в обобщенных функциях типа свертки. Если обобщенная функция $\varphi(T, \lambda, t)$ сводится к обыкновенной функции, причем существует постоянная $N(\lambda)$ такая, что при всех неособых значениях λ

$$\int_0^T |\varphi(T, \lambda, t)|^2 dt \leq N(\lambda) \quad (1.7)$$

и свободный член уравнения (5) интегрируем с квадратом на интервале $(0, T)$, то уравнение (5) является интегральным уравнением Фредгольма II рода.

В § 1 гл. III показано, что условие (7) выполняется, если стационарная часть системы обладает достаточно сильными фильтрующими свойствами. В дальнейшем мы ограничимся только рассмотрением тех задач, в которых (5) является уравнением Фредгольма.

Из общего уравнения (5) можно получить ряд важных частных случаев. Если в (3) $\lambda = 0$, то входное воздействие является периодическим и уравнение (5) при $\lambda = 0$ определяет вынужденные периодические колебания системы (1):

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^T \varphi(T, t - \tau) a(\tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^T \varphi(T, t - \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau, \quad (1.8)$$

где

$$\varphi(T, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)} \quad (1.9)$$

— ИЧХ стационарной части системы.

Если подставить в (8) явное выражение функции $a(t)$ из (2), то уравнение периодических вынужденных колебаний (8) примет вид

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(T, t - \tau) y_n(\tau) d\tau + \int_0^T \varphi(T, t - \tau) x_n(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Если же в (3) $x_n(t) = 1$, то, очевидно,

$$y_n(t) = W_c(\lambda, t), \quad (1.11)$$

где $W_c(\lambda, t)$ — передаточная функция системы (1). Подставляя в уравнение (5) $x_n = 1$ и учитывая (11), получим интегральное уравнение для передаточной функции системы (1):

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) a(\tau) W_c(\lambda, \tau) d\tau + W(\lambda), \quad (1.12)$$

т. е. в развернутом виде

$$W_c(\lambda, t) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(T, \lambda, t - \tau) W_c(\lambda, \tau) d\tau + W(\lambda). \quad (1.13)$$

Нетрудно также получить интегральное уравнение для СИХЧ системы (1). Для этого можно воспользоваться общим уравнением (II. 7.18), что в случае системы (1) приводит к уравнению

$$\varphi_c(T, \lambda, t - \tau) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - q) a(q) \varphi_c(T, \lambda, q, q - \tau) dq + \varphi(T, \lambda, t - \tau). \quad (1.14)$$

Если проинтегрировать это уравнение по τ от 0 до T и учесть (II.6.23), то снова получим (12).

В некоторых задачах интегральное уравнение вынужденных колебаний удастся упростить. Пусть внешнее возмущение периодически и симметрично, т. е.

$$x_n(t) = -x_n\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad x_n(t) = x_n(t + T), \quad (1.15)$$

причем функция $a(t)$ имеет период $T/2$, т. е.

$$a(t) = a\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (1.16)$$

и разыскиваются симметричные вынужденные колебания

$$y_n(t) = -y_n\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad z_n(t) = -z_n\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (1.17)$$

Тогда, как показано в § 6 гл. II, уравнение (8) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(t) = & \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) a(\tau) y_n(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) x_n(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\psi(T, t) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega] e^{(2k+1)i\omega t} \quad (1.19)$$

— ИЧХ второго рода стационарной части системы (1).

Если условие (16) выполняется, то функция $a(t)$ принимает за период T четное число $m = 2q$ различных значений, т. е.

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a_i, \quad t_{i-1} < t < t_i \quad (i=1, 2, \dots, q), \\ a_{i+q} &= a_i, \quad t_0 = 0, \quad t_q = \frac{T}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

и уравнение (18) имеет вид

$$\begin{aligned} y_n(t) = & \sum_{i=1}^q a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(T, t - \tau) y_n(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) x_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Уравнение (8) (и соответственно (18)) имеет смысл, если определены все величины $W(ki\omega)$ (соответственно $W[(2k+1)i\omega]$), что соответствует нерезонансной стационарной части системы.

Если же стационарная часть является резонансной, то обычно можно прийти к уравнениям вида (8) или (18) путем предварительного преобразования исходной системы (1). Это преобразование заключается в следующем.

Положим в уравнениях (1)

$$z = ky + z_1, \quad (1.22)$$

где k — некоторая постоянная. Тогда из первого уравнения (1) получается

$$y = W_1(p) z_1, \quad W_1(p) = \frac{W(p)}{1 - kW(p)}, \quad (1.23)$$

а из второго уравнения (1) имеем

$$z_1 = a_1(t) y + x, \quad a_1(t) = a(t) - k. \quad (1.24)$$

Уравнения (23) и (24) описывают замкнутую систему, которая, по существу, не отличается от (1). При этом функция $a_1(t)$ — кусочно-постоянная, так как из (2) и (24) следует, что

$$a_1(t) = a_1(t+T), \quad a_1(t) = a_i - k, \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (1.25)$$

Если постоянную k можно выбрать так, чтобы передаточная функция $W_1(p)$ не имела полюсов вида $si\omega$ (s — целое) (или вида $(2s+1)i\omega$), то преобразованная система будет иметь нерезонансную стационарную часть. Такое k всегда можно выбрать, если числитель и знаменатель передаточной функции не имеют общих корней вида $si\omega$, где s — целое число. В практических задачах это условие всегда выполняется; поэтому в дальнейшем изложении предполагается, что это имеет место.

Имея в виду сказанное, можно предполагать, что уже в системе (1) стационарная часть является нерезонансной. Впрочем, как будет показано ниже, преобразование уравнений (1) к виду (25), (24) может оказаться целесообразным и по ряду других соображений. Все сказанное относилось к простейшим системам рассматриваемого класса, описываемых уравнениями вида (1).

Далее будут рассмотрены также более сложные системы, содержащие несколько нестационарных элементов. На интервале $t_{i-1} < t < t_i$, в силу (2), уравнения (1) имеют вид

$$y = W(p) z, \quad z = a_i y + x,$$

откуда следует, что

$$y = \frac{W(p)}{1 - a_i W(p)} x, \quad t_{i-1} < t < t_i.$$

Таким образом, формально имеем, что уравнения (1) эквивалентны следующим:

$$y = W_{i3}(p) x, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.26)$$

где

$$W_{i3}(p) = \frac{W(p)}{1 - a_i W(p)}. \quad (1.27)$$

Таким образом, изучаемая система (1) на различных интервалах времени имеет различные передаточные функции $W_{i3}(p)$.

В некоторых работах по автоматическому управлению последовательность уравнений вида (26), где $W_{i3}(p)$ — известные передаточные функции, считают исходной для задания изучаемой системы. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае такой способ задания системы является *некорректным*, так как, если рассматривать системы более сложной структуры, чем (1), может оказаться, что одна и та же последовательность передаточных функций $W_{i3}(p)$ соответствует системам различной структуры, имеющим различные динамические свойства.

Пример 1.1. Рассмотрим две структурные схемы, изображенные на рис. 30, 31. Пусть периодическая функция $a(t)$ описывается соотношениями (II.6.61). Легко проверить, что для обеих систем

$$\left. \begin{aligned} y &= W_{13}(p) x, & 0 < t < t_1, \\ y &= W_{23}(p) x, & t_1 < t < T, \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

где

$$W_{13}(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)}, \quad W_{23}(p) = W_1(p). \quad (1.29)$$

Таким образом, одна и та же последовательность передаточных функций вида (28) соответствует двум различным системам. Поэтому в дальнейшем в этой главе всегда предполагается известной структура изучаемой системы.

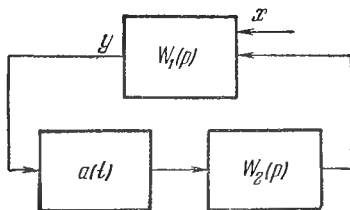


Рис. 30.

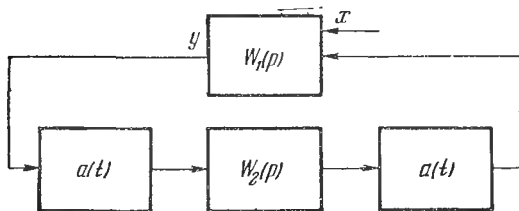


Рис. 31.

При исследовании установившихся процессов в одноконтурных системах рассматриваемого класса, содержащих несколько нестационарных элементов, всегда можно получить систему интегральных уравнений, аналогичных выведенным выше.

Пример 1.2. Пусть имеем систему уравнений

$$y = W_2(p) u, \quad u = a_2(t) v, \quad v = W_1(p) z, \quad z = a_1(t) y + x, \quad (1.30)$$

где функции a_1 и a_2 — кусочно-постоянные и периодические,

$$a_i(t) = a_{i,s}, \quad t_{i,s-1} < t < t_{i,s}, \quad a_i(t) = a_i(t + T), \quad (1.31) \\ i = 1, 2.$$

Полагая выполненными условия (3) и (4), задачу определения установившихся колебаний системы (30) можно с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, свести к задаче решения системы интегральных

уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t - \tau) a_2(\tau) v_{\Pi}(\tau) d\tau, \\ v_{\Pi}(t) &= \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t - \tau) a_1(\tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ &\quad + \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t - \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

где φ_1, φ_2 — соответствующие СИЧХ. Если подставить в эти уравнения $x_{\Pi}(t) = 1$, то

$$y_{\Pi}(t) = W_{yx}(\lambda, t), \quad v_{\Pi}(t) = W_{vx}(\lambda, t) \quad (1.33)$$

будут являться передаточными функциями системы по соответствующим выходам. Система интегральных уравнений (32) при этом приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} W_{yx}(\lambda, t) &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t - \tau) a_2(\tau) W_{vx}(\lambda, \tau) d\tau, \\ W_{vx}(\lambda, t) &= \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t - \tau) a_1(\tau) W_{yx}(\lambda, \tau) d\tau + \\ &\quad + W_1(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Если же $x(t) = \delta_T(t - \tau)$, то

$$y_{\Pi}(t) = \varphi_{yx}(T, \lambda, t, t - \tau), \quad v_{\Pi}(t) = \varphi_{vx}(T, \lambda, t, t - \tau) \quad (1.35)$$

— СИЧХ системы. При этом из (32) получится

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{yx}(T, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t - q) a_2(q) \varphi_{vx}(T, \lambda, q, q - \tau) dq, \\ \varphi_{vx}(T, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \int_0^T \varphi_1(T, \lambda, t - q) a_1(q) \varphi_{yx}(T, \lambda, q, q - \tau) dq + \\ &\quad + \varphi_1(T, \lambda, t - \tau). \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

При $\lambda = 0$ из (32) получаются уравнения вынужденных периодических колебаний системы (30):

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= \int_0^T \varphi_2(T, t - \tau) a_2(\tau) v_n(\tau) d\tau, \\ v_n(t) &= \int_0^T \varphi_1(T, t - \tau) [a_1(\tau) y_n(\tau) + x_n(\tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

§ 2. Переходные процессы одноконтурных линейных систем с коммутацией параметров

Рассмотрим сначала способ построения переходных процессов в системе, описываемой уравнениями (1.1), в предположении, что функция $a(t)$ — кусочно-постоянная, но не обязательно периодическая, т. е.

$$a(t) = a_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (2.1)$$

где t_i — заданные моменты времени.

Пусть

$$h(t) = L^{-1}[W(p)] \quad (2.2)$$

— весовая функция стационарной части системы (1.1). Тогда первое уравнение (1.1) эквивалентно следующему:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) z(\tau) d\tau + y_0(t), \quad (2.3)$$

где функция $y_0(t)$ характеризует влияние начальных условий и является решением уравнения

$$\frac{1}{W(p)} y_0(t) = 0, \quad (2.4)$$

если только функция $\frac{1}{W(p)}$ является преобразованием по Лапласу, что далее предполагается. При $t = 0$ из (3) имеем

$$y(0) = y_0(0).$$

Если подставить в (3) второе уравнение (1.1), то получим интегральное уравнение вида

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)[a(\tau)y(\tau) + x(\tau)]d\tau + y_0(t), \quad (2.5)$$

которое является интегральным уравнением Вольтерра.

Ниже будет изложен способ построения точного решения этого уравнения. Однако, прежде чем перейти к изложению этого способа, рассмотрим способ решения одного интегрального уравнения типа свертки.

Пусть имеем уравнение вида

$$u(t) = \int_a^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau + f(t), \quad t > a \geq 0. \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t > a, \\ 0, & t < a, \end{cases} \quad \bar{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t > a, \\ 0, & t < a. \end{cases} \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (6) можно переписать в виде

$$\bar{u}(t) = \int_0^t g(t-\tau)\bar{u}(\tau)d\tau + \bar{f}(t), \quad t > 0. \quad (2.8)$$

Предположим, что функции $g(t)$, $\bar{f}(t)$ и искомое решение $\bar{u}(t)$ имеют преобразование Лапласа; тогда, переходя в (8) к изображениям, получим

$$\bar{U}(p) = G(p)\bar{U}(p) + \bar{F}(p), \quad (2.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G(p) &= L[g(t)], \quad \bar{U}(p) = L[\bar{u}(t)] = \int_a^\infty u(t)e^{-pt}dt, \\ \bar{F}(p) &= L[\bar{f}(t)] = \int_a^\infty f(t)e^{-pt}dp. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Из (9) получаем

$$\bar{U}(p) = \frac{1}{1-G(p)}\bar{F}(p). \quad (2.11)$$

Если выражение, стоящее в правой части этого равенства, является преобразованием Лапласа от некоторой функции, то соответствующий оригинал

$$\bar{u}(t) = L^{-1}[\bar{U}(p)] \quad (2.12)$$

действительно является решением интегрального уравнения (6). Обычно выражение (11) представляют в виде

$$\bar{U}(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)} \bar{F}(p) + \bar{F}(p); \quad (2.13)$$

при этом, если функция

$$G_3(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)} \quad (2.14)$$

является изображением, причем

$$g_3(t) = L^{-1}\left[\frac{G(p)}{1 - G(p)}\right] \quad (2.15)$$

— соответствующий оригинал, то из (13), используя теорему об изображении свертки и соотношения (7), получим

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \int_a^t g_3(t - \tau) f(\tau) d\tau + f(t), & t > a, \\ 0, & t < a. \end{cases} \quad (2.16)$$

Используя сказанное, можно перейти к непосредственному решению уравнения (5).

Для этого заметим сначала, что при $0 < t < t_1$, в силу (1), уравнение (5) эквивалентно следующему:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) [a_1 y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_0(t), \quad (2.17)$$

$$0 < t < t_1.$$

Переходя от этого уравнения к изображениям по Лапласу, получим

$$Y(p) = W(p) a_1 Y(p) + W(p) X(p) + Y_0(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{W(p)}{1 - a_1 W(p)} X(p) + \frac{a_1 W(p)}{1 - a_1 W(p)} Y_0(p) + Y_0(p). \quad (2.18)$$

Выражение

$$W_{13}(p) = \frac{W(p)}{1 - a_1 W(p)}, \quad (2.19)$$

в соответствии с (1.27), представляет собой передаточную функцию замкнутой системы, получающейся из (1.1) при $a(t) = a_1$. Поэтому, обозначая через $h_{13}(t)$ соответствующую весовую функцию, из (18) получаем

$$y(t) = \int_0^t h_{13}(t - \tau) [a_1 y_0(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_0(t), \quad (2.20)$$

$$0 < t < t_1.$$

Формула (20) дает искомое решение на интервале времени $0 < t < t_1$.

При выводе соотношения (20) предполагалось, что все рассматриваемые функции от t имеют изображения по Лапласу, а рассматриваемые функции от p являются изображениями. Эти предположения сохраняются и далее.

Перейдем теперь к построению решения на интервале $t_1 < t < t_2$. Непосредственно из (5) и (1) следует, что

$$y(t) = \int_{t_1}^t h(t - \tau) [a_2 y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_1(t), \quad (2.21)$$

$$t_1 < t < t_2,$$

где

$$y_1(t) = \int_0^{t_1} h(t - \tau) [a_1 y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_0(t). \quad (2.22)$$

В интеграл, стоящий в правой части этого равенства, входит неизвестная функция $y(t)$. Однако фактически здесь используются только значения $y(t)$ на интервале $0 < t < t_1$, которые уже определены формулой (20). Поэтому, если подставить в (22) соотношение (20), то функция $y_1(t)$ станет известной. Тогда уравнение (21) будет являться частным случаем (6), и, решая его изложенным выше способом, получим, что

$$y(t) = \int_{t_1}^t h_{23}(t - \tau) [a_2 y_1(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_1(t), \quad (2.23)$$

$$t_1 < t < t_2,$$

где

$$h_{23}(t) = L^{-1} \left[\frac{W(p)}{1 - a_2 W(p)} \right]. \quad (2.24)$$

Это соотношение и определяет искомое решение на интервале $t_1 < t < t_2$. Вообще, легко видеть, что

$$y(t) = \int_{t_{s-1}}^t h(t-\tau) [a_s y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_{s-1}(t), \quad (2.25)$$

$$t_{s-1} < t < t_s,$$

где

$$y_{s-1}(t) = \int_{t_{s-2}}^{t_{s-1}} h(t-\tau) [a_{s-1} y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_{s-2}(t) \quad (2.26)$$

является известной функцией. Поэтому на произвольном интервале времени искомое решение имеет вид

$$y(t) = \int_{t_{s-1}}^t h_{s3}(t-\tau) [a_s y_{s-1}(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_{s-1}(t), \quad (2.27)$$

$$t_{s-1} < t < t_s.$$

Легко видеть, что по существу изложенный метод решения представляет собой разновидность метода припасовывания, широко применяемого в задачах автоматического управления и нелинейных колебаний.

Однако по сравнению с приемами, обычно применяющимися на практике, изложенный подход обладает рядом особенностей, на которых следует остановиться.

Традиционно метод припасовывания применяется к системам, описываемым на различных интервалах времени различными системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Изложенный подход применим для исследования систем, описываемых на последовательных интервалах времени уравнениями гораздо более общего вида.

Применение метода припасовывания в обычной форме к системам, заданным операторными уравнениями, также связано с определенными трудностями даже в том случае, когда передаточная функция $W(p)$ в уравнениях (1.1) является дробно-рациональной. В этом

случае систему (1.1) удастся свести к последовательности обыкновенных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, решения которых соединяются между собой с помощью так называемых «условий скачков» [1, 75]. Процедура обычного припасовывания для таких уравнений оказывается чрезвычайно громоздкой. Правда, введения «условий скачков» можно избежать путем применения специального линейного преобразования [71, 75], однако при этом появляются новые вычислительные трудности, связанные с пересчетом от одних неизвестных к другим.

Изложенный подход позволяет обойти указанные трудности и в силу этого, несомненно, является весьма удобным, так как припасовывание решений в моменты переключения осуществляется здесь автоматически в процессе решения исходного интегрального уравнения.

Пример 2.1. В качестве примера, не имеющего прямого отношения к задачам управления, однако хорошо иллюстрирующего изложенную методику, рассмотрим систему (2.1) в предположениях, что

$$W(p) = \frac{1}{\sqrt{p + \alpha}}, \quad a(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -1, & t > t_1. \end{cases} \quad (2.28)$$

В данном случае

$$\left. \begin{aligned} W_{13}(p) &= W(p) = \frac{1}{\sqrt{p + \alpha}}, \\ W_{23}(p) &= \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{1}{\sqrt{p + \alpha} + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Пользуясь соответствующими таблицами [27], находим, что

$$\left. \begin{aligned} h_{13}(t) &= h(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}, \\ h_{23}(t) &= e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du. \quad (2.31)$$

Поэтому при нулевых начальных условиях и произвольном внешнем возбуждении $x(t)$ будем иметь по (20) и (23)

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h_{13}(t-\tau) x(\tau) d\tau, & 0 < t < t_1, \\ y(t) &= \int_{t_1}^t h_{23}(t-\tau) [x(\tau) - y_1(\tau)] d\tau + y_1(t), & t_1 < t, \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

где по (22)

$$y_1(t) = \int_0^{t_1} h_{13}(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad t > t_1. \quad (2.33)$$

Аналогичный способ построения переходных процессов может быть применен для исследования одноконтурных систем, содержащих несколько нестационарных элементов.

Пример 2.2. При известных начальных условиях переходные процессы в системе (1.30) описываются уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h_2(t-\tau) a_2(\tau) v(\tau) d\tau + y_0(t), \\ v(t) &= \int_0^t h_1(t-\tau) [a_1(\tau) y(\tau) + x(\tau)] d\tau + v_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

где h_1 и h_2 — соответствующие весовые функции, $y_0(t)$, $v_0(t)$ — известные функции, характеризующие начальное состояние стационарных элементов системы, а функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ не обязательно периодичны. Пусть при $0 < t < t_1$ оба коэффициента $a_1(t)$ и $a_2(t)$ сохраняют постоянные значения:

$$a_1(t) = a_{11}, \quad a_2(t) = a_{21}.$$

Тогда из (34) имеем

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h_2(t-\tau) a_{21} v(\tau) d\tau + y_0(t), \\ 0 < t < t_1, \\ v(t) &= \int_0^t h_1(t-\tau) [a_{11} y(\tau) + x(\tau)] d\tau + v_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Эти уравнения легко решаются переходом к преобразованию Лапласа. Действительно, переходя в (35) к изображениям, имеем

$$\left. \begin{aligned} Y(p) &= a_{21} W_2(p) V(p) + Y_0(p), \\ V(p) &= a_{11} W_1(p) Y(p) + W_1(p) X(p) + V_0(p), \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

откуда легко найти изображения $Y(p)$ и $V(p)$ и, соответственно, решения $y(t)$ и $v(t)$ на интервале $0 < t < t_1$. Более подробно процесс решения будет описан в § 5, посвященном исследованию многомерных систем.

Предположим теперь для примера, что в момент $t = t_1$ коэффициент $a_2(t)$ переключается и принимает значение a_{22} , а коэффициент $a_1(t)$ остается неизменным. Тогда на интервале $t_1 < t < t_2$, где t_2 — следующий момент переключения одной из функций $a_i(t)$, из (34) имеем

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \int_{t_1}^t h_2(t-\tau) a_{22} v(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{t_1} h_2(t-\tau) a_{21} v(\tau) d\tau + y_0(t), \quad t_1 < t < t_2, \\ v(t) &= \int_{t_1}^t h_1(t-\tau) [a_{11} y(\tau) + x(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^{t_1} h_1(t-\tau) [a_{11} y(\tau) + x(\tau)] d\tau + v_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Так как значения функций $y(t)$, $v(t)$ на интервале $0 < t < t_1$ уже вычислены, то последние два слагаемых

в правой части каждого из уравнений (37) известны. Поэтому уравнения (37) представляют собой систему уравнений типа свертки с известными правыми частями, и их можно решить переходом к изображениям по Лапласу. В результате искомое решение будет продолжено на интервал $t_1 < t < t_2$ и т. д.

§ 3. Определение вынужденных колебаний в одноконтурных системах с дробно-рациональными передаточными функциями стационарных элементов

В настоящем параграфе приводится способ определения вынужденных периодических колебаний рассматриваемого класса систем, основанный на решении соответствующих интегральных уравнений для того случая, когда стационарные элементы системы имеют сосредоточенные параметры, т. е. передаточные функции являются отношением двух многочленов от p . В основе излагаемого метода решения лежит вариант метода припасовывания, изложенный в предыдущем параграфе.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда имеем одноконтурную систему с одним нестационарным элементом (1.1):

$$y = W(p)z, \quad z = a(t)y + x, \quad x(t) = x(t+T), \quad (3.1)$$

где

$$a(t) = a(t+T), \quad a(t) = a_i \quad \text{при} \quad t_{i-1} < t < t_i \quad (3.2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m), \quad t_0 = 0, \quad t_m = T,$$

а числа a_i пока предполагаются отличными от нуля. При этом

$$W(p) = \frac{m(p)}{d(p)} = \frac{b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}{p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n}. \quad (3.3)$$

В дальнейшем для простоты изложения будем полагать, что уравнение

$$d(p) = 0 \quad (3.4)$$

имеет только простые корни и, соответственно, имеет место разложение на простые дроби

$$W(p) = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p - p_{\rho}}, \quad \gamma_{\rho} = \frac{m(p_{\rho})}{d'(p_{\rho})}. \quad (3.5)$$

В этом случае передаточной функции (3) соответствует весовая функция

$$h(t) = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} e^{p_{\rho} t}, \quad L[h(t)] = W(p). \quad (3.6)$$

На интервале $t_{i-1} < t < t_i$, когда $a(t) = a_i$, имеем

$$y = W_{i3}(p) x, \quad (3.7)$$

где по (1.27) и (3)

$$W_{i3}(p) = \frac{m(p)}{d(p) - a_i m(p)} = \frac{m(p)}{\Delta_i(p)}. \quad (3.8)$$

Ниже для простоты выкладок предполагается также, что корни $p_{i\rho}$ ($\rho = 1, 2, \dots, n$) каждого из уравнений

$$\Delta_i(p) = 0 \quad (3.9)$$

простые, причем $p_{\alpha} \neq p_{i\rho}$. В этом случае, аналогично (5), имеем

$$W_{i3}(p) = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{i\rho}}{p - p_{i\rho}}, \quad \gamma_{i\rho} = \frac{m(p_{i\rho})}{\Delta'_i(p_{i\rho})} \quad (3.10)$$

и соответствующие весовые функции имеют вид

$$h_{i3}(t) = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{i\rho} e^{p_{i\rho} t}, \quad (3.11)$$

причем

$$L[h_{i3}(t)] = W_{i3}(p). \quad (3.12)$$

Отметим также одно важное тождество, которое понадобится ниже. Пусть p_{α} — произвольный корень уравнения (4). Тогда из (8) имеем

$$W_{i3}(p_{\alpha}) = -\frac{1}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.13)$$

Подставляя в (10) $p = p_{\alpha}$ и учитывая (13), находим, что

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{i\rho}}{p_{\alpha} - p_{i\rho}} = -\frac{1}{a_i}. \quad (3.14)$$

Используя введенные обозначения и исходные соотношения, приведем способ решения одного вспомогатель-

ного интегрального уравнения типа свертки специального вида, который понадобится ниже для решения основной задачи, рассматриваемой в этом параграфе.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$y = \int_{t_{i-1}}^t h(t-\tau) [a_i y(\tau) + x(\tau)] d\tau + f(t), \quad t > t_{i-1}, \quad (3.15)$$

$$f(t) = \sum_{\rho=1}^n c_{i\rho} e^{p_{\rho} t}, \quad (3.16)$$

где функция $h(t)$ определяется соотношениями (6), p_{ρ} — корни уравнения (4) и $c_{i\rho}$ — произвольные постоянные.

Покажем, что решение уравнения (15) при $t > t_{i-1}$ имеет вид

$$y(t) = \int_{t_{i-1}}^t h_{i3}(t-\tau) x(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n d_{i\rho} e^{p_{i\rho} t}, \quad (3.17)$$

где при каждом i $h_{i3}(t)$ определяется по (11), $p_{i\rho}$ — корни уравнения (9), а постоянные $d_{i\rho}$ связаны с постоянными $c_{i\alpha}$ соотношениями

$$d_{i\rho} = a_i \gamma_{i\rho} e^{-p_{i\rho} t_{i-1}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_{i\alpha}}{p_{i\rho} - p_{\alpha}} e^{p_{\alpha} t_{i-1}}. \quad (3.18)$$

Для доказательства формул (17), (18), как и в предыдущем параграфе, введем функции $\bar{y}(t)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{f}(t)$ такие, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}(t) &= y(t), & \bar{x}(t) &= x(t), \\ \bar{f}(t) &= f(t) & \text{при } t > t_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

и, кроме того,

$$\bar{y}(t) = \bar{x}(t) = \bar{f}(t) = 0 \quad \text{при } t < t_{i-1}. \quad (3.20)$$

Используя (19) и (20), уравнение (15) можно переписать в виде

$$\bar{y}(t) = \int_{t_{i-1}}^t h(t-\tau) [a_i \bar{y}(\tau) + \bar{x}(\tau)] d\tau + \bar{f}(t), \quad t > 0. \quad (3.21)$$

Уравнение (21) представляет собой интегральное уравнение типа свертки, и для его решения удобно применить преобразование Лапласа. Перейдя от уравнения (21) к изображениям по Лапласу и учитывая формулу (I. 6.10) для изображения свертки, из (19) и (20) получим, аналогично (2.13),

$$\bar{Y}(p) = L[h(t)][a_i \bar{Y}(p) + \bar{X}(p)] + \bar{F}(p), \quad (3.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}(p) &= L[\bar{y}(t)], & \bar{X}(p) &= L[\bar{x}(t)], \\ \bar{F}(p) &= L[\bar{f}(t)], & L[h(t)] &= W(p). \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Из (22) имеем

$$\bar{Y}(p) = \frac{m(p)}{d(p) - a_i m(p)} \bar{X}(p) + \frac{a_i m(p)}{d(p) - a_i m(p)} \bar{F}(p) + \bar{F}(p). \quad (3.24)$$

Переходя здесь к оригиналам с учетом (8) и (12), получаем

$$y(t) = \int_{t_{i-1}}^t h_{i3}(t-\tau) x(\tau) d\tau + r_i(t), \quad t > t_{i-1}, \quad (3.25)$$

где

$$r_i(t) = a_i \int_{t_{i-1}}^t h_{i3}(t-\tau) f(\tau) d\tau + f(t), \quad t > t_{i-1}. \quad (3.26)$$

Для вычисления функции $r_i(t)$ подставим в правую часть (26) соотношения (16) и (11). Тогда после несложных, но довольно громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned} r_i(t) = & -a_i \sum_{\rho=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{i\rho} c_{i\alpha} e^{p_{i\rho} t}}{p_\alpha - p_{i\rho}} e^{(p_\alpha - p_{i\rho}) t_{i-1}} + \\ & + a_i \sum_{\rho=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{i\rho} c_{i\alpha} e^{p_\alpha t}}{p_\alpha - p_{i\rho}} + \sum_{\alpha=1}^n c_{i\alpha} e^{p_\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Вторую сумму в правой части этого выражения можно упростить:

$$a_i \sum_{\rho=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{i\rho} c_{i\alpha} e^{p_\alpha t}}{p_\alpha - p_{i\rho}} = a_i \sum_{\alpha=1}^n c_{i\alpha} e^{p_\alpha t} \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{i\rho}}{p_\alpha - p_{i\rho}}.$$

Если в правой части этого равенства выполнить суммирование по ρ и учесть тождество (14), то в результате получим

$$a_i \sum_{\rho=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{i\rho} c_{i\alpha} e^{p_\alpha t}}{p_\alpha - p_{i\rho}} = - \sum_{\alpha=1}^n c_{i\alpha} e^{p_\alpha t}.$$

Подставляя это соотношение в (27) и проведя дальнейшие упрощения, найдем окончательно:

$$r_i(t) = a_i \sum_{\rho=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{i\rho} c_{i\alpha} e^{p_{i\rho} t}}{p_{i\rho} - p_\alpha} e^{(p_\alpha - p_{i\rho}) t_{i-1}}. \quad (3.28)$$

Легко проверить, что соотношения (25) и (28) эквивалентны (17) и (18). Отметим также, что если ввести в рассмотрение векторы

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{i1} \\ \vdots \\ d_{in} \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} c_{i1} \\ \vdots \\ c_{in} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

а также матрицу B_i с элементами

$$b_{\rho\alpha}^i = \frac{a_i \gamma_{i\rho} e^{(p_\alpha - p_{i\rho}) t_{i-1}}}{p_{i\rho} - p_\alpha}, \quad (3.30)$$

то вместо (18) можно получить

$$D_i = B_i C_i. \quad (3.31)$$

Используя приведенные выше вспомогательные соотношения, перейдем к задаче исследования вынужденных колебаний. Для этого рассмотрим уравнение (1.8):

$$y_n(t) = \int_0^T \Phi(T, t - \tau) [a(\tau) y_n(\tau) + x_n(\tau)] d\tau. \quad (3.32)$$

В рассматриваемом случае, если воспользоваться формулами (5), (II. 3.71), имеем

$$\Phi(T, t - \tau) = \begin{cases} r(t - \tau + T) + h(t - \tau), & 0 < t - \tau < T, \\ r(t - \tau + T), & -T < t - \tau < 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

где $h(t)$ — весовая функция (6) и

$$r(t) = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} t}}{1 - e^{p_{\rho} T}}. \quad (3.34)$$

С учетом (33) и (34) уравнение (32) можно представить в виде

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^t h(t-\tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^T r(t-\tau+T) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (3.35)$$

Если в последнем интеграле произвести интегрирование по τ , то вместо (35) получим

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^t h(t-\tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho} e^{p_{\rho} t}, \quad (3.36)$$

где неизвестные постоянные $c_{1\rho}$ определяются соотношениями

$$c_{1\rho} = \gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} T}}{1 - e^{p_{\rho} T}} \int_0^T e^{-p_{\rho} \tau} [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau \quad (3.37)$$

или, что эквивалентно,

$$c_{1\rho} = \gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} T}}{1 - e^{p_{\rho} T}} \left[\sum_{i=1}^m a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-p_{\rho} \tau} y_{\Pi}(\tau) d\tau + \int_0^T e^{-p_{\rho} \tau} x_{\Pi}(\tau) d\tau \right]. \quad (3.38)$$

Рассмотрим уравнение (36) при $0 < \tau < t < t_1$. В этом случае

$$a(t) = a_1$$

и из (36) имеем

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^t h(t-\tau) [a_1 y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho} e^{p_{\rho} t}, \quad (3.39)$$

$$0 < t < t_1.$$

Это уравнение является частным случаем (15), (16). По этому, используя (17) и (18), получим

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^t h_{13}(t-\tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n d_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}, \quad (3.40)$$

$$0 < t < t_1,$$

где постоянные $d_{1\rho}$ линейно связаны с постоянными $c_{1\alpha}$ соотношениями вида (18):

$$d_{1\rho} = a_{1\gamma_{1\rho}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_{1\alpha}}{p_{1\rho} - p_{\alpha}}. \quad (3.41)$$

Таким образом, нам удалось выразить решение $y_{\Pi}(t)$ на интервале $0 < t < t_1$ через неизвестные постоянные $c_{1\rho}$, от которых решение $y_{\Pi}(t)$ зависит линейно.

Перейдем теперь к интервалу времени $t_1 < t < t_2$. На этом интервале уравнение (36) можно представить в виде

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_1}^t h(t-\tau) [a_2 y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_1} h(t-\tau) [a_1 y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}, \quad (3.42)$$

$$t_1 < t < t_2.$$

Но, очевидно, если подставить выражение (6) для $h(t)$ во второй интеграл в правой части этого равенства, то получится

$$\int_0^{t_1} h(t-\tau) [a_1 y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau = \sum_{\alpha=1}^n g_{1\alpha} e^{p_{\alpha} t}, \quad (3.43)$$

где

$$g_{1\alpha} = \gamma_{\alpha} \int_0^{t_1} e^{-p_{\alpha} \tau} [a_1 y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (3.44)$$

При этом весьма существенно, что постоянные $g_{1\alpha}$ зависят только от значений функции $y_{\Pi}(t)$ на интервале $0 < t < t_1$.

Поэтому для вычисления этих постоянных можно подставить в (44) выражение (40). Тогда в результате окажется, что постоянные линейным образом зависят от постоянных $c_{1\alpha}$.

Из сказанного вытекает, что уравнение (42) с учетом (43), (44) может быть представлено в виде

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_1}^t h(t-\tau) [a_2 y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \sum_{\rho=1}^n c_{2\rho} e^{p_{\alpha} t}, \quad (3.45)$$

$$t_1 < t < t_2,$$

где коэффициенты $c_{2\rho}$ линейно зависят от величин $c_{1\rho}$. Применяя для решения уравнения (45) формулы (17) и (18), получим

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_1}^t h_{23}(t-\tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n d_{2\rho} e^{p_{2\rho} t}, \quad (3.46)$$

$$t_1 < t < t_2,$$

где векторы D_2 и C_2 связаны соотношением (31):

$$D_2 = B_2 C_2,$$

а матрица B_2 известна.

Используя далее эту схему вычислений, можно построить искомое решение на последующих интервалах времени. В результате будем иметь

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_{i-1}}^t h_{i3}(t-\tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n d_{i\rho} e^{p_{i\rho} t}, \quad (3.47)$$

$$t_{i-1} < t < t_i,$$

где постоянные $d_{i\rho}$ известным образом линейно зависят от постоянных $c_{1\rho}$. Для окончательного построения решения необходимо найти эти постоянные. Для этого можно воспользоваться выражениями (38), которые можно представить в виде

$$c_{1\rho} = \gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} T}}{1 - e^{p_{\rho} T}} \sum_{\alpha=1}^m g_{\alpha\rho}, \quad (3.48)$$

где

$$g_{\alpha\rho} = \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} e^{-p_{\rho}\tau} [a_{\alpha}y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (3.49)$$

Величины $g_{\alpha\rho}$ фактически вычислялись в процессе построения решения; поэтому соотношения (48) представляют собой линейную систему уравнений относительно величин $c_{1\rho}$ с известными коэффициентами и известными правыми частями.

Если определитель Δ этой системы не равен нулю, то уравнения (45) имеют единственное решение. Подставляя это решение в (40) и последующие выражения, мы найдем единственный режим вынужденных колебаний. Таким образом, случай $\Delta \neq 0$ соответствует отсутствию резонанса.

Если же $\Delta = 0$, то уравнения (48) разрешимы только при выполнении некоторых дополнительных требований на вид входного сигнала $x_{\Pi}(t)$. Это говорит о наличии в системе резонанса. На подробностях рассмотрения этого случая останавливаться не будем.

Дополним теперь сказанное выше несколькими важными замечаниями.

1. При выводе интегрального уравнения (32) и, следовательно, во всем дальнейшем изложении предполагалось, что среди корней уравнения (4) нет чисел вида $p_{\alpha} = si\omega$, где s — целое число.

Однако в ряде практических задач это условие не выполняется. Особенно часто встречается случай, когда среди корней уравнения (4) имеются нулевые. Это затруднение можно преодолеть различными способами.

Проще всего вопрос решается, если числитель и знаменатель передаточной функции (3) не имеет общих корней. В этом случае, как уже указывалось, заменой переменной

$$z = ky + z_1 \quad (3.50)$$

можно привести систему (1) к виду (1.23), (1.24):

$$y = W_1(p) z_1,$$

$$z_1 = a_1(t)y + x,$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= \frac{m(p)}{d(p) - km(p)}, \\ a_1(t) &= a_i - k, \quad t_{i-1} < t < t_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

При этом, если полиномы $m(p)$ и $d(p)$ не имеют общих резонансных корней, то всегда выбором k можно добиться того, чтобы уравнение

$$d(p) - km(p) = 0$$

не имело резонансных корней.

2. Если в (50) можно взять k равным одному из чисел a_i , то мы получим функцию $a_1(t)$, которая по крайней мере на интервале времени $t_{i-1} < t < t_i$ равна нулю. Легко видеть, что при этом изложенная процедура построения решения упрощается, так как на соответствующих интервалах времени

$$h_{i3}(t) = h(t),$$

и из (36) имеем готовое решение:

$$\begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= \int_{t_{i-1}}^t h(t-\tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{t_{i-1}} h(t-\tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho} e^{\rho t}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$t_{i-1} < t < t_i.$$

Выражения для неизвестных постоянных $c_{1\rho}$ (38) также соответственно упрощаются. Поэтому, если в уравнениях (1) функция $a(t)$ не обращается в нуль, целесообразно уже в исходных уравнениях сделать замену переменной (50), положив k равным одному из чисел a_i . При этом i следует выбирать таким образом, чтобы уравнение

$$d(p) - a_i m(p) = 0$$

не имело резонансных корней. В практических задачах такой выбор числа i , как правило, возможен.

3. При изложении метода решения предполагалось, что корни уравнений (4) и (9) простые. Это предпо-

жение сделано исключительно для простоты выкладок, поскольку общий способ припасовывания, изложенный в предыдущем параграфе, свободен от каких-либо предположений относительно полюсов передаточных функций $W(p)$, $W_{iz}(p)$.

Пример 3.1. В качестве примера рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях системы с амплитудно-импульсной модуляцией II рода, когда в системе (1)

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T, \end{cases} \quad a(t) = a(t + T). \quad (3.53)$$

В этом случае по (38) и (53)

$$c_{1\rho} = \gamma_\rho \frac{e^{\rho_\rho T}}{1 - e^{\rho_\rho T}} \int_0^{t_1} e^{-\rho_\rho \tau} y_\Pi(\tau) d\tau + \\ + \gamma_\rho \frac{e^{\rho_\rho T}}{1 - e^{\rho_\rho T}} \int_0^T e^{-\rho_\rho \tau} x_\Pi(\tau) d\tau, \quad (3.54)$$

откуда видно, что для построения системы уравнений (48) достаточно вычислить решение $y_\Pi(t)$ на интервале $0 < t < t_1$. Подставляя в (54) решение (40), после несложных выкладок получим

$$c_{1\rho} = \sum_{k=1}^n \beta_{\rho k} d_{1k} + \delta_\rho, \quad (3.55)$$

где

$$\beta_{sk} = \gamma_\rho \frac{e^{\rho_\rho T}}{1 - e^{\rho_\rho T}} \frac{e^{(\rho_{1k} - \rho_\rho) t_1} - 1}{\rho_{1k} - \rho_\rho}, \quad (3.56)$$

$$\delta_\rho = \gamma_\rho \frac{e^{\rho_\rho T}}{1 - e^{\rho_\rho T}} \left[\int_0^T e^{-\rho_\rho \tau} x_\Pi(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{t_1} e^{-\rho_\rho q} dq \int_0^q h_{13}(q - \tau) x_\Pi(\tau) d\tau \right]. \quad (3.57)$$

Если учесть дополнительно, что

$$\int_0^{t_1} dq \int_0^q f(q, \tau) d\tau = \int_0^{t_1} d\tau \int_\tau^{t_1} f(q, \tau) dq, \quad (3.58)$$

то выражение (57) для постоянных δ_p можно привести с учетом (11) и (14) к более простому виду:

$$\delta_p = \gamma_p \frac{e^{p_p T}}{1 - e^{p_p T}} \left[\int_{t_1}^T e^{-p_p \tau} x_n(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} e^{(p_{1\alpha} - p_p) t_1}}{p_{1\alpha} - p_p} \int_0^{t_1} e^{-p_{1\alpha} \tau} x_n(\tau) d\tau \right]. \quad (3.59)$$

Если подставить в (55) вытекающее из (41), (53) соотношение

$$d_{1p} = \gamma_{1p} \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_{1\alpha}}{p_{1p} - p_{\alpha}},$$

то из (55) получим

$$c_{1p} = \sum_{s=1}^n u_{ps} c_{1s} + \delta_p, \quad (3.60)$$

где

$$u_{ps} = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_{pk} \gamma_{1k}}{p_{1k} - p_s}. \quad (3.61)$$

Уравнение (60) представляет собой частный случай системы (48).

Аналогичный метод определения вынужденных колебаний может быть применен и в том случае, когда изучаемая одноконтурная система содержит несколько нестационарных элементов. Мы не будем в этом параграфе рассматривать этот вопрос в общем виде и проиллюстрируем ход соответствующих выкладок на простом примере.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях системы (1.30). Ее решение сводится к решению системы уравнений (1.37). При этом будем предполагать дополнительно, что

$$a_i(t) = \begin{cases} (-1)^{t-1}, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T, \end{cases} \quad a_i(t) = a_i(t + T) \quad (3.62)$$

($i = 1, 2$)

и, кроме того,

$$W_1(p) = \frac{1}{p - \alpha_1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{p - \alpha_2}. \quad (3.63)$$

В этом случае

$$\varphi_l(T, t - \tau) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha_l(t-\tau+T)}}{1 - e^{\alpha_l T}} + e^{\alpha_l(t-\tau)}, & 0 < t - \tau < T, \\ \frac{e^{\alpha_l(t-\tau+T)}}{1 - e^{\alpha_l T}}, & -T < t - \tau < 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

С учетом (62) и (64) уравнения (1.37) для данного случая записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= \int_0^T e^{\alpha_2(t-\tau)} a_2(\tau) v_{\Pi}(\tau) d\tau + c_2 e^{\alpha_2 t}, \\ v_{\Pi}(t) &= \int_0^T e^{\alpha_1(t-\tau)} [a_1(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + c_1 e^{\alpha_1 t}, \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{e^{\alpha_1 T}}{1 - e^{\alpha_1 T}} \int_0^{t_1} e^{-\alpha_1 \tau} y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ &\quad + \frac{e^{\alpha_1 T}}{1 - e^{\alpha_1 T}} \int_0^T e^{-\alpha_1 \tau} x_{\Pi}(\tau) d\tau, \\ c_2 &= - \frac{e^{\alpha_2 T}}{1 - e^{\alpha_2 T}} \int_0^{t_1} e^{-\alpha_2 \tau} v_{\Pi}(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Из (65) и (62) следует, что при $0 < t < t_1$ уравнения (65) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= - \int_0^t e^{\alpha_2(t-\tau)} v_{\Pi}(\tau) d\tau + c_2 e^{\alpha_2 t}, \quad 0 < t < t_1, \\ v_{\Pi}(t) &= \int_0^T e^{\alpha_1(t-\tau)} [y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + c_1 e^{\alpha_1 t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

На интервале $t_1 < t < T$ из (65) и (62) имеем

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= - \int_0^{t_1} e^{\alpha_2(t-\tau)} v_{\Pi}(\tau) d\tau + c_2 e^{\alpha_2 t}, \quad t_1 < t < T, \\ v_{\Pi}(t) &= \int_0^{t_1} e^{\alpha_1(t-\tau)} [y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + c_1 e^{\alpha_1 t} + \\ &\quad + \int_{t_1}^t e^{\alpha_1(t-\tau)} x_{\Pi}(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Таким образом, если решение уравнений (67) найдено, то, подставляя его в правые части (68), продолжим искомого решение на интервал $t_1 < t < T$.

Переходя в (67) к изображениям по Лапласу, имеем

$$\left. \begin{aligned} Y_{\Pi}(p) &= - \frac{V_{\Pi}(p)}{p - \alpha_2} + \frac{c_2}{p - \alpha_2}, \\ V_{\Pi}(p) &= \frac{1}{p - \alpha_1} [Y_{\Pi}(p) + X_{\Pi}(p)] + \frac{c_1}{p - \alpha_1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} Y_{\Pi}(p) &= - \frac{X_{\Pi}(p)}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) + 1} - \\ &\quad - \frac{c_1}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) + 1} + \frac{c_2(p - \alpha_1)}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) + 1}, \\ V_{\Pi}(p) &= \frac{p - \alpha_2}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) + 1} X_{\Pi}(p) + \\ &\quad + \frac{c_1(p - \alpha_2)}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) + 1} + \frac{c_2}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Переходя в этих уравнениях к оригиналам, получим, что

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= \int_0^t g_2(t - \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + c_1 g_2(t) + c_2 f_1(t), \\ &\quad 0 < t < t_1, \\ v_{\Pi}(t) &= \int_0^t g_1(t - \tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + c_1 g_1(t) - c_2 g_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

где g_i , f_1 — известные функции. Подставляя выражения (71) в формулы (66), получим систему уравнений относительно c_1 и c_2 . Подставляя же найденные значения c_1 и c_2 в (71), получим искомое решение при $0 < t < t_1$, после чего, пользуясь (68), можно продлить его на интервал $t_1 < t < T$.

Рассмотрим теперь последовательность нахождения решения интегрального уравнения вынужденных колебаний системы (1) в том случае, когда входное возмущение симметрично,

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right),$$

а периодический коэффициент $a(t)$ имеет период $T/2$. В этом случае в дополнение к (1.2) имеем условия (1.20).

Как указывалось в § 1, в рассматриваемом случае в системе, вообще говоря, возникают симметричные периодические вынужденные колебания, определяемые интегральным уравнением (1.18):

$$y_n(t) = \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) a(\tau) y_n(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) x_n(\tau) d\tau. \quad (3.72)$$

Задача определения симметричных вынужденных колебаний значительно проще общего случая, так как здесь число временных интервалов, на которых надо строить решение $y_n(t)$, уменьшается вдвое. При этом процедура решения уравнения (72) ничем не отличается от процедуры решения общего уравнения (32). Действительно, если учесть, что в рассматриваемом случае, по (5) и (II. 3. 78),

$$\psi(T, t - \tau) = \\ = \begin{cases} r_2\left(t - \tau + \frac{T}{2}\right) + h(t - \tau), & 0 < t - \tau < \frac{T}{2}, \\ r_2\left(t - \tau + \frac{T}{2}\right), & -\frac{T}{2} < t - \tau < 0, \end{cases} \quad (3.73)$$

где весовая функция $h(t)$ определяется формулой (6) и

$$r_2(t) = - \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{\rho t}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}}, \quad (3.74)$$

то уравнение (72) можно представить в виде

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^t h(t-\tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^{T/2} r_2\left(t - \tau + \frac{T}{2}\right) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (3.75)$$

Если учесть (74), то, выполнив во втором интервале в правой части (75) интегрирование по τ , получим также

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^t h(t-\tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \sum_{\rho=1}^n \tilde{c}_{1\rho} e^{\rho t}, \quad (3.76)$$

где неизвестные постоянные $\tilde{c}_{1\rho}$ определяются соотношениями

$$\tilde{c}_{1\rho} = -\gamma_{\rho} \frac{e^{\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{\rho \frac{T}{2}}} \int_0^{T/2} e^{-\rho \tau} [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (3.77)$$

Уравнение (76) ничем не отличается от (36).

Поэтому, предполагая постоянные $\tilde{c}_{1\rho}$ известными, можно, пользуясь формулами (47), построить искомое решение $y_{\Pi}(t)$ на интервале $0 < t < T/2$. Оно будет линейно зависеть от постоянных $\tilde{c}_{1\rho}$.

После этого, подставляя найденные выражения (47) в соотношения (77), получим линейную систему уравнений относительно постоянных $\tilde{c}_{1\rho}$, аналогичную (48). В отсутствие резонанса, когда определитель этой системы не равен нулю, всегда будем иметь единственный режим вынужденных симметричных периодических колебаний.

Пример 3.3. Пусть в уравнениях (1)

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad a(t) = a\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (3.78)$$

т. е. амплитудно-импульсный элемент II рода имеет период, вдвое меньший периода внешнего возбуждения, причем $x_{II}(t) = -x_{II}\left(t + \frac{T}{2}\right)$. При этом из (77) имеем

$$c_{I\rho} = -\gamma_\rho \frac{e^{p_\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}} \int_0^{t_1} e^{-p_\rho \tau} y_{II}(\tau) d\tau - \\ - \gamma_\rho \frac{e^{p_\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}} \int_0^{T/2} e^{-p_\rho \tau} x_{II}(\tau) d\tau, \quad (3.79)$$

т. е. для построения уравнений, определяющих постоянные $c_{I\rho}$, достаточно построить решение $y_{II}(t)$ на интервале $0 < t < t_1$. Подставляя в (79) соотношение (40), после преобразований получим

$$c_{I\rho} = \sum_{k=1}^n \tilde{\beta}_{\rho k} \tilde{d}_{1k} + \tilde{\delta}_\rho, \quad (3.80)$$

где

$$\tilde{\beta}_{\rho k} = \gamma_\rho \frac{e^{p_\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}} \frac{1 - e^{(p_{1k} - p_\rho)t}}{p_{1k} - p_\rho}, \quad (3.81)$$

$$\tilde{\delta}_\rho = -\gamma_\rho \frac{e^{p_\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}} \left[\int_0^{T/2} e^{-p_\rho \tau} x_{II}(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{t_1} e^{-p_\rho q} dq \int_0^q h_{13}(q - \tau) x_{II}(\tau) d\tau \right]. \quad (3.82)$$

При этом, если учесть (58), то постоянные $\tilde{\delta}_\rho$ можно представить в виде

$$\tilde{\delta}_\rho = -\gamma_\rho \frac{e^{\frac{p_\rho T}{2}}}{1 + e^{\frac{p_\rho T}{2}}} \left[\int_{t_1}^{T/2} e^{-p_\rho \tau} x_\Pi(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} e^{(p_{1\alpha} - p_\rho) t_1}}{p_{1\alpha} - p_\rho} \int_0^{t_1} e^{-p_{1\alpha} \tau} x_\Pi(\tau) d\tau \right]. \quad (3.83)$$

Если далее подставить в (80) соотношение, вытекающее из (41), (78),

$$\tilde{d}_{1\rho} = \gamma_{1\rho} \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_{1\alpha}}{p_{1\rho} - p_\alpha}, \quad (3.84)$$

то из (80) получим

$$c_{1\rho} = \sum_{s=1}^n \tilde{u}_{\rho s} c_{1s} + \tilde{\delta}_\rho, \quad (3.85)$$

где

$$\tilde{u}_{\rho s} = \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{\beta}_{\rho k} \gamma_{1k}}{p_{1k} - p_s}. \quad (3.86)$$

Соотношения (85) и представляют собой искомую систему уравнений относительно неизвестных постоянных $c_{1\rho}$

§ 4. Определение передаточной функции и СИЧХ одноконтурной системы

Для системы (31) в предположениях предыдущего параграфа можно указать точный способ определения СИЧХ и передаточной функции, основанный на решении соответствующих интегральных уравнений (1.12) или (1.14).

Для того чтобы сразу охватить оба эти уравнения, рассмотрим более общую задачу решения интегрального уравнения

$$y_\Pi(t) = \int_0^T \varphi(T, \lambda, t - \tau) [a(\tau) y_\Pi(\tau) + x_\Pi(\tau)] d\tau. \quad (4.1)$$

Если учесть, что в соответствии с (3.5) и (II. 3.70)

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t - \tau) = \\ = \begin{cases} e^{-\lambda(t-\tau)} h(t - \tau) + r(T, \lambda, t - \tau + T), & 0 < t - \tau < T, \\ r(T, \lambda, t - \tau + T), & -T < t - \tau < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$r(T, \lambda, t) = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)t}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} \quad (4.3)$$

и весовая функция $h(t)$ определяется из (3.6), то с учетом (2) уравнение (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_{\Pi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} h(t - \tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^T r(T, \lambda, t - \tau + T) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau, \quad (4.4) \\ 0 < t < T. \end{aligned}$$

Если подставить сюда (3), то после интегрирования во втором слагаемом в правой части получим

$$\begin{aligned} y_{\Pi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} h(t - \tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho}(\lambda) e^{p_{\rho} t}, \quad 0 < t < T, \quad (4.5) \end{aligned}$$

где

$$c_{1\rho}(\lambda) = \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} \int_0^T e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + x_{\Pi}(\tau)] d\tau \quad (4.6)$$

— неизвестные функции параметра λ .

Если временно считать величины $c_{1\rho}(\lambda)$ известными, то для решения уравнения (5) можно применить

способ, изложенный в предыдущем параграфе. На интервале $0 < t < t_1$ имеем

$$y_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} h(t-\tau) [a_1 y_n(\tau) + x_n(\tau)] d\tau + \\ + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho}(\lambda) e^{\rho_1 \rho t}. \quad (4.7)$$

Уравнение (7) отличается от уравнения (3.15), соответствующего $\lambda = 0$, лишь тем, что в нем функция $h(t)$ заменена на $e^{-\lambda t} h(t)$, а функция $f(t)$ заменена на $e^{-\lambda t} f(t)$. Поэтому, переходя в (7) к изображениям и учитывая, что

$$L[e^{-\lambda t} x(t)] = X(p + \lambda), \quad (4.8)$$

получим

$$Y_n(p) = \frac{W(p + \lambda)}{1 - a_1 W(p + \lambda)} X_n(p) + \\ + \frac{a_1 W(p + \lambda)}{1 - a_1 W(p + \lambda)} F(p + \lambda) + F(p + \lambda). \quad (4.9)$$

При этом в силу (8) и (3.10)

$$L^{-1} \left[\frac{W(p + \lambda)}{1 - a_1 W(p + \lambda)} \right] = e^{-\lambda t} h_{13}(t). \quad (4.10)$$

Последние два слагаемых в (9) получаются из последних двух слагаемых в правой части формулы (3.24) заменой p на $p + \lambda$. Поэтому из (8) и (3.26) вытекает, что

$$L^{-1} \left[\frac{a_1 W(p + \lambda)}{1 - a_1 W(p + \lambda)} F(p + \lambda) + F(p + \lambda) \right] = e^{-\lambda t} r_1(t), \quad (4.11)$$

где функция $r_1(t)$ дается формулой (3.28) при $i = 1$.

Резюмируя сказанное, получаем, что решение уравнения (7) имеет вид

$$y_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} h_{13}(t-\tau) x_n(\tau) d\tau + \\ + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n d_{1\rho}(\lambda) e^{\rho_1 \rho t}, \quad 0 < t < t_1, \quad (4.12)$$

где величины $d_{i\rho}(\lambda)$ те же, что в (3.17), и связаны с величинами $c_{i\rho}(\lambda)$ соотношениями (3.41), не зависящими от λ . Совершенно аналогично, продолжая вычисления, получим, что

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_{i-1}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} h_{i3}(t-\tau) x_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n d_{i\rho}(\lambda) e^{p_{i\rho} t}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (4.13)$$

а величины $d_{i\rho}(\lambda)$ связаны с величинами $c_{i\rho}(\lambda)$ теми же соотношениями (3.18).

Продолжая вычисления аналогичным образом и подставляя найденные решения в (12), мы приходим к уравнениям аналогичным (3.48), которые будут представлять собой систему линейных уравнений, относительно величин $c_{i\rho}(\lambda)$:

$$c_{i\rho}(\lambda) = \sum_{k=1}^n \mu_{\rho k}(\lambda) c_{i\rho}(\lambda) + \delta_{\rho}(\lambda). \quad (4.14)$$

Коэффициенты и свободные члены этой системы являются известными функциями параметра λ . Найдя величины $c_{i\rho}(\lambda)$ из системы (14) и возвращаясь к уравнениям (13), мы построим интересующее нас решение $y_{\Pi}(t)$. При этом нетрудно заметить, что уравнения (12) и (13) отличаются от соответствующих уравнений (3.40) и (3.47) только заменой p_{ρ} , $p_{i\rho}$ на $-\lambda + p_{\rho}$, $-\lambda + p_{i\rho}$. Отсюда следует, что система уравнений (14) может быть сразу получена из (3.48) заменой p_{ρ} на $-\lambda + p_{\rho}$ и $p_{i\rho}$ на $-\lambda + p_{i\rho}$. Поэтому фактически решение уравнения (1) может быть непосредственно получено из формул предыдущего параграфа.

Вернемся теперь непосредственно к задаче определения передаточной функции и СИЧХ изучаемой системы. Так как уравнение для передаточной функции (1.12) получается из уравнения (1) при $x_{\Pi}(t) = 1$, то, подставляя в уравнения (14) $x_{\Pi}(t) = 1$, мы сразу получим систему уравнений для постоянных $c_{i\rho}(\lambda)$, соответствующих передаточной функции.

На интервалах $t_{i-1} < t < t_i$ передаточная функция определяется соотношениями, получающимися из (13) при $x_{\Pi}(t) = 1$:

$$W_c(\lambda, t) = \int_{t_{i-1}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} h_{i3}(t-\tau) d\tau + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n d_{i\rho} e^{p_{i\rho} t}, \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (4.15)$$

Если подставить сюда (3.11), то после интегрирования получим

$$W_c(\lambda, t) = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{i\rho}}{\lambda - p_{i\rho}} - \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{i\rho}}{\lambda - p_{i\rho}} e^{(p_{i\rho} - \lambda)(t - t_{i-1})} + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n d_{i\rho} e^{p_{i\rho} t}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (4.16)$$

что с учетом (3.10) эквивалентно следующему:

$$W_c(\lambda, t) = W_{i3}(\lambda) + \sum_{\rho=1}^n \xi_{i\rho} e^{(p_{i\rho} - \lambda)t}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (4.17)$$

где

$$\xi_{i\rho} = - \frac{\gamma_{i\rho}}{\lambda - p_{i\rho}} e^{(\lambda - p_{i\rho}) t_{i-1}} + d_{i\rho}. \quad (4.18)$$

Соотношения (6) при этом также упрощаются и при $x_{\Pi}(t) = 1$ принимают вид

$$c_{i\rho}(\lambda) = \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho} - \lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho} - \lambda)T}} \int_0^T e^{(\lambda - p_{\rho})\tau} a(\tau) W_c(\lambda, \tau) d\tau + \frac{\gamma_{\rho}}{\lambda - p_{\rho}}. \quad (4.19)$$

Пример 4.1. Найдем передаточную функцию системы с амплитудно-импульсной модуляцией II рода. Эта система описывается уравнениями (3.1), а функция $a(t)$ определяется формулами (3.53). В этом случае при $0 < t < t_1$ имеем уравнение, получающееся из (7)

при $a(t) = 1$, $x_n(t) = 1$, $y_n(t) = W_c(\lambda, t)$:

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} h(t-\tau) [W_c(\lambda, \tau) + 1] d\tau + e^{-\lambda t} \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho}(\lambda) e^{p_\rho t}. \quad (4.20)$$

Решение этого уравнения, в соответствии с (17) и (18), может быть сведено к виду

$$y_n(t) = W_c(\lambda, t) = \frac{W(\lambda)}{1 - W(\lambda)} + \sum_{\rho=1}^n \xi_{1\rho} e^{(p_{1\rho} - \lambda)t}, \quad 0 < t < t_1, \quad (4.21)$$

где

$$\xi_{1\rho} = \frac{\gamma_{1\rho}}{p_{1\rho} - \lambda} + d_{1\rho}(\lambda), \quad (4.22)$$

причем

$$d_{1\rho}(\lambda) = \gamma_{1\rho} \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_{1\alpha}(\lambda)}{p_{1\rho} - p_\alpha}. \quad (4.23)$$

Соотношения (19) в данном случае имеют вид

$$c_{1\rho}(\lambda) = \gamma_\rho \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \int_0^{t_1} e^{(\lambda - p_\rho)\tau} W_c(\lambda, \tau) d\tau + \frac{\gamma_\rho}{\lambda - p_\rho}. \quad (4.24)$$

Подставляя сюда (21), после преобразований приходим к системе уравнений вида (14):

$$c_{1\rho}(\lambda) = \sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_{\rho k}(\lambda) c_{1k}(\lambda) + \tilde{\delta}_\rho(\lambda), \quad (4.25)$$

где величины $\tilde{\mu}_{\rho k}$ и $\tilde{\delta}_\rho$ после преобразований приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu}_{\rho k}(\lambda) &= \gamma_\rho \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} [e^{(p_{1\alpha} - p_\rho)t_1} - 1]}{(p_{1\alpha} - p_\rho)(p_{1\alpha} - p_k)}, \\ \tilde{\delta}_\rho(\lambda) &= \gamma_\rho \frac{W(\lambda)}{1 - W(\lambda)} \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \frac{e^{(\lambda - p_\rho)t_1} - 1}{\lambda - p_\rho} + \\ &+ \gamma_\rho \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} [e^{(p_{1\alpha} - p_\rho)t_1} - 1]}{(p_{1\alpha} - p_\rho)(p_{1\alpha} - \lambda)} + \frac{\gamma_\rho}{\lambda - p_\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Найдя коэффициенты $c_{1\rho}(\lambda)$ и подставив их в (21), получим выражение для передаточной функции на интервале $0 < t < t_1$. После этого передаточная функция может быть продолжена на интервале $t_1 < t < T$ с помощью уравнения

$$W_c(\lambda, t) =$$

$$= \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-\tau)} h(t-\tau) d\tau + \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-\tau)} h(t-\tau) [y_n(\tau) + 1] d\tau + \\ + \sum_{i=1}^n c_{1\rho}(\lambda) e^{(p_\rho - \lambda)t}, \quad t_1 < t < T, \quad (4.27)$$

куда вместо $y_n(t)$ следует подставить выражение (21). На подробностях дальнейших вычислений останавливаться не будем, так как они в принципе вполне элементарны и в каждом конкретном случае выполняются без труда.

Пример 4.2. Найдём явное выражение передаточной функции простейшей системы, описываемой уравнениями

$$y = \frac{-1}{p - \alpha} z, \quad z = a(t) y + x, \quad (4.28)$$

где функция $a(t)$ та же, что и в предыдущем примере. В данном случае по (28) и (3.1)–(3.12) легко вычислить, что

$$W(\lambda) = -\frac{1}{\lambda - \alpha}, \quad W_{13}(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{1 - W(\lambda)} = -\frac{1}{\lambda - \alpha + 1}, \quad (4.29)$$

причем

$$\gamma_1 = -1, \quad p_1 = \alpha, \quad \gamma_{11} = -1, \quad p_{11} = \alpha - 1, \quad d_{11} = c_{11}. \quad (4.30)$$

Подставляя выражения (29) и (30) в (26), получаем уравнение, определяющее постоянную c_{11} :

$$c_{11} (1 - \tilde{\mu}_{11}(\lambda)) = \tilde{\delta}_1(\lambda), \quad (4.31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_{11}(\lambda) &= \frac{e^{(\alpha-\lambda)T}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T}} (e^{-t_1} - 1), \\ \bar{\delta}_1(\lambda) &= \frac{e^{-t_1} - 1}{\lambda - \alpha + 1} \frac{e^{(\alpha-\lambda)T}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T}} + \\ &+ \frac{e^{(\alpha-\lambda)(T-t_1)} - e^{(\alpha-\lambda)T}}{(\lambda - \alpha + 1)(\lambda - \alpha)(1 - e^{(\alpha-\lambda)T})} - \frac{1}{\lambda - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Отсюда имеем

$$c_{11}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \alpha + 1} \frac{e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1} - e^{(\alpha-\lambda)(T-t_1)}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}} + \\ + \frac{1}{\lambda - \alpha} \frac{e^{(\alpha-\lambda)(T-t_1)} - 1}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}}.$$

Тогда по (21)

$$W_c(\lambda, t) = -\frac{1}{\lambda - \alpha + 1} + \\ + \frac{1}{(\lambda - \alpha + 1)(\lambda - \alpha)} \frac{e^{(\alpha-\lambda)(T-t_1)} - 1}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}} e^{(\alpha-\lambda+1)t}, \quad (4.33) \\ 0 < t < t_1,$$

и по (27)

$$W_c(\lambda, t) = -\frac{1}{\lambda - \alpha} + \\ + \frac{1}{(\lambda - \alpha + 1)(\lambda - \alpha)} \frac{1 - e^{(\alpha-\lambda+1)t_1}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}} e^{(\alpha-\lambda)t}, \quad (4.34) \\ t_1 < t < T,$$

а из (33) и (34) непосредственно следует, что при $t_1 = T$

$$W_c(\lambda, t) = W_c(\lambda) = -\frac{1}{\lambda - \alpha + 1}.$$

Перейдем теперь к задаче определения СИЧХ системы (3.1). Покажем, что решение этой задачи может быть найдено на основании общих формул, полученных в начале этого параграфа. Действительно, СИЧХ системы

$$y_n(t) = \varphi_c(T, \lambda, t, t - \nu), \quad 0 < \nu < T, \quad (4.35)$$

может быть получена как решение интегрального уравнения (1) в предположении, что

$$x_{\Pi}(t) = \delta(t - v), \quad 0 < t < T, \quad 0 < v < T. \quad (4.36)$$

Пусть v таково, что

$$t_{s-1} < v < t_s; \quad (4.37)$$

тогда, подставляя в (13) выражение для $x_{\Pi}(t)$ (36) и учитывая (37) и свойства интеграла от δ -функции, получим

$$y_{\Pi}(t) = \sum_{\rho=1}^n d_{i\rho}(\lambda) e^{(p_{i\rho}-\lambda)t}, \quad (4.38)$$

$$t_{i-1} < t < t_i, \quad i=1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m.$$

На интервале $t_{s-1} < t < t_s$ из аналогичных соображений имеем

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= \sum_{\rho=1}^n d_{s\rho}(\lambda) e^{(p_{s\rho}-\lambda)t}, & t_{s-1} < t < v, \\ y_{\Pi}(t) &= e^{-\lambda(t-v)} h_{s3}(t-v) + \sum_{\rho=1}^n d_{s\rho}(\lambda) e^{(p_{s\rho}-\lambda)t}, \\ &v < t < t_s. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Уравнения (6), определяющие постоянные $c_{1\rho}$ в данном случае, с учетом (36), имеют вид

$$\begin{aligned} c_{1\rho}(\lambda) = \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} \int_0^T e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} a(\tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)(T-v)}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Подставляя сюда соотношения (38), (39), получим

$$\begin{aligned} c_{1\rho}(\lambda) = \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} \left[\sum_{i=1}^m a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} \sum_{k=1}^n d_{ik} e^{(p_{ik}-\lambda)\tau} d\tau + \right. \\ \left. + a_s \int_v^{t_s} e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} e^{-\lambda(\tau-v)} h_{s3}(\tau-v) d\tau + e^{(\lambda-p_{\rho})v} \right]. \end{aligned}$$

После преобразований отсюда получается, с учетом (3.14),

$$c_{1\rho}(\lambda) = \gamma_\rho \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{a_i d_{ik}}{p_{ik} - p_\rho} (e^{(p_{ik} - p_\rho)t_i} - e^{(p_{ik} - p_\rho)t_{i-1}}) + a_s \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{sk}}{p_{sk} - p_\rho} e^{(p_{sk} - p_\rho)t_s} e^{(\lambda - p_{sk})v} \right]. \quad (4.41)$$

Если подставить сюда выражения (3.31), то придем к линейной системе уравнений относительно постоянных $c_{1\rho}(\lambda)$, которые определяют искомую СИЧХ.

Пример 4.3. Для системы с амплитудно-импульсной модуляцией II рода, рассмотренной в примере 4.1, при $0 < v < t_1$ по (38), (39) имеем

$$y_n(t) = \varphi(T, \lambda, t, t - v) = \begin{cases} \sum_{\rho=1}^n d_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{1\rho} - \lambda)t}, & 0 < t < v, \\ \sum_{\rho=1}^n d_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{1\rho} - \lambda)t} + e^{-\lambda(t-v)} h_{13}(t - v), & v < t < t_1. \end{cases} \quad (4.42)$$

При этом, учитывая (23), из (41) получим

$$c_{1\rho}(\lambda) = \sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_{\rho k}(\lambda) c_{1k}(\lambda) + \tilde{\delta}_{1\rho}(\lambda, v), \quad (4.43)$$

где $\tilde{\mu}_{\rho k}(\lambda)$ те же, что в (26), а постоянные $\tilde{\delta}_{1\rho}(\lambda, v)$ определяются соотношениями

$$\delta_{1\rho}(\lambda, v) = \gamma_\rho \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{1k}}{p_{1k} - p_\rho} e^{(p_{1k} - p_\rho)t_1} e^{(\lambda - p_{1k})v}. \quad (4.44)$$

Решая эти уравнения и возвращаясь к соотношениям (42), построим СИЧХ при $0 < v < t_1$, $0 < t < t_1$. Для того чтобы построить СИЧХ при $0 < v < t_1$, $t_1 \leq t \leq T$,

теперь можно использовать (5), что приведет с учетом (36) к следующему:

$$y_{\Pi}(t) = \varphi(T, \lambda, t, t - v) = \\ = \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-\tau)} h(t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + e^{-\lambda(t-v)} h(t - v) + \\ + \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho} e^{(\rho_{1\rho} - \lambda)t}, \quad t_1 < t < T. \quad (4.45)$$

Построение СИЧХ при $t_1 < v < T$ проводится аналогично.

Пример 4.4. Найдем явное выражение для СИЧХ простейшей системы, рассмотренной в примере 4.2. Пусть сначала $0 < v < t_1$. Тогда по (42)

$$y_{\Pi}(t) = \varphi(T, \lambda, t, t - v) = \\ = \begin{cases} d_{11} e^{(\alpha - \lambda - 1)t}, & 0 < t < v, \\ d_{11} e^{(\alpha - \lambda - 1)t} + e^{-\lambda(t-v)} h_{13}(t - v), & v < t < T. \end{cases} \quad (4.46)$$

При этом по (29), (30)

$$d_{11} = c_{11}, \quad h_{13}(t) = -e^{(\alpha-1)t}. \quad (4.47)$$

Уравнение для определения постоянной c_{11} (40) в данном случае получается следующим:

$$c_{11} = -\frac{e^{(\alpha-\lambda)T}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T}} \int_0^{t_1} e^{(\lambda-\alpha)\tau} y_{\Pi}(\tau) d\tau - \frac{e^{(\alpha-\lambda)(T-v)}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T}}. \quad (4.48)$$

Подставляя в (48) соотношения (46), (47), после преобразований получим

$$d_{11} = c_{11} = -\frac{e^{(\alpha-\lambda)(T-v)} e^{v-t_1}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}}. \quad (4.49)$$

Подставляя (49) в (46), находим

$$\varphi_c(T, \lambda, t, t - v) = \\ = \begin{cases} -\frac{e^{(\alpha-\lambda-1)(t-v)} e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}}, & 0 < t < v < t_1, \\ -\frac{e^{(\alpha-\lambda-1)(t-v)}}{1 - e^{(\alpha-\lambda)T} e^{-t_1}}, & 0 < v < t < t_1. \end{cases} \quad (4.50)$$

Легко проверить, что при $t_1 = T$ из (50) получается СИЧХ замкнутой стационарной системы с передаточной функцией $-\frac{1}{\lambda - \alpha + 1}$. Продолжим теперь найденное выражение для СИЧХ на интервал $t_1 < t < T$. Для этого подставим в (45) выражения (49) и (50). Тогда, разбивая интеграл в правой части (45) на сумму двух интегралов — от 0 до v и от v до t_1 , в результате придем к выражению

$$\varphi_c(T, \lambda, t, t - v) = -\frac{e^{(\alpha - \lambda)(t - v)} e^{v - t_1}}{1 - e^{(\alpha - \lambda)T} e^{-t_1}}, \quad 0 < v < t_1, \quad (4.51)$$

$$t_1 < t < T.$$

Соотношения (50) и (51) определяют искомую СИЧХ при условии $0 < v < t_1$.

Пусть теперь

$$t_1 < v < T.$$

Тогда

$$y_{\Pi}(t) = \varphi_c(T, \lambda, t, t - v) = c_{11} e^{(\alpha - \lambda - 1)t}, \quad 0 < t < t_1. \quad (4.52)$$

Подстановка этого выражения в (48) дает

$$c_{11} = -\frac{e^{(\alpha - \lambda)(T - v)}}{1 - e^{(\alpha - \lambda)T} e^{-t_1}}. \quad (4.53)$$

Из (53) и (52) имеем

$$y_{\Pi}(t) = \varphi_c(T, \lambda, t, t - v) =$$

$$= -\frac{e^{(\alpha - \lambda)(T - v)} e^{(\alpha - \lambda - 1)t}}{1 - e^{(\alpha - \lambda)T} e^{-t_1}}, \quad \begin{matrix} 0 < t < t_1, \\ t_1 < v < T. \end{matrix} \quad (4.54)$$

Продолжая это решение на интервал $t_1 < t < T$ с помощью формулы (5), с учетом (36) имеем

$$y_{\Pi}(t) = \varphi_c(T, \lambda, t, t - v) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t - \tau)} h(t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + c_{11} e^{(\alpha - \lambda)t}, & t_1 < t < v < T, \\ \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t - \tau)} h(t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + c_{11} e^{(\alpha - \lambda)t} + \\ + e^{-\lambda(t - v)} h(t - v), & t_1 < v < t < T, \end{cases} \quad (4.55)$$

Подставляя сюда (53) и (54), в результате получим

$$\varphi_c(T, \lambda, t, t - \nu) = \begin{cases} -\frac{e^{(a-\lambda)(t-\nu+T)}e^{-t_1}}{1 - e^{(a-\lambda)T}e^{-t_1}}, & t_1 < t < \nu < T, \\ -\frac{e^{(a-\lambda)(t-\nu)}}{1 - e^{(a-\lambda)T}e^{-t_1}}, & t_1 < \nu < t < T. \end{cases} \quad (4.56)$$

Полученные формулы полностью определяют СИЧХ рассматриваемой системы в квадрате $0 < t, \nu < T$.

§ 5. Многомерные линейные системы с периодической коммутацией параметров

Изложенные выше способы исследования можно перенести на многомерные системы.

Пусть имеем матричную систему уравнений

$$Y = W(p)Z, \quad Z = A(t)Y + X, \quad (5.1)$$

где Y, Z — неизвестные векторы или матрицы, A, W, X — известные матрицы таких размеров, что уравнения (1) имеют смысл. В уравнениях (1) матрица $W(p)$ является передаточной матрицей стационарной части системы, а матрица $A(t)$ — периодическая и кусочно-постоянная:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= A(t+T), \quad A(t) = A_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad t_0 = 0, \quad t_m = T. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

На интервалах времени $t_{i-1} < t < t_i$ уравнения (1) эквивалентны следующим:

$$Y = W_{i3}(p)X, \quad (5.3)$$

где

$$W_{i3}(p) = [E - W(p)A_i]^{-1}W(p), \quad (5.4)$$

E — единичная матрица соответствующего размера.

При заданных начальных условиях для решения уравнений (1) можно применить способ, изложенный в § 2 этой главы. Действительно, при известных началь-

ных условиях уравнения (1) эквивалентны следующему интегральному уравнению:

$$Y(t) = \int_0^t H(t-\tau) [A(\tau) Y(\tau) + X(\tau)] d\tau + Y_0(t), \quad (5.5)$$

где $Y_0(t)$ — известный вектор,

$$H(t) = L^{-1} [W(p)] \quad (5.6)$$

— весовая матрица стационарной части системы (1).

На интервале $0 < t < t_1$ имеем

$$Y(t) = \int_0^t H(t-\tau) [A_1 Y(\tau) + X(\tau)] d\tau + Y_0(t). \quad (5.7)$$

Далее, при $t_1 < t < t_2$

$$\begin{aligned} Y(t) = & \int_{t_1}^t H(t-\tau) [A_2 Y(\tau) + X(\tau)] d\tau + \\ & + \int_0^{t_1} H(t-\tau) [A_1 Y(\tau) + X(\tau)] d\tau + Y_0(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

и т. д., откуда следует, что на каждом из интервалов $t_{i-1} < t < t_i$ мы имеем уравнение свертки вида

$$Y(t) = \int_{t_{i-1}}^t H(t-\tau) [A_i Y(\tau) + X(\tau)] d\tau + Y_{i-1}(t), \quad (5.9)$$

где $Y_{i-1}(t)$ — известный вектор.

Решение каждого из уравнений (9) может быть получено способом, изложенным в § 2 этой главы. Поэтому останавливаться на подробностях не будем. Отметим только, что изложенный способ решения фактически не использует предположения о периодичности матрицы $A(t)$.

Перейдем теперь к рассмотрению установившихся процессов в системах рассматриваемого класса. Введем

в рассмотрение матричную СИЧХ стационарной части системы (1):

$$\Phi(T, \lambda, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}. \quad (5.10)$$

Предполагая, что

$$X(t) = e^{\lambda t} X_{\Pi}(t), \quad Y(t) = e^{\lambda t} Y_{\Pi}(t), \quad Z(t) = e^{\lambda t} Z_{\Pi}(t), \quad (5.11)$$

где X_{Π} , Y_{Π} , Z_{Π} — периодические по t векторы с периодом T , можно, используя соображения, примененные при выводе уравнения (1.5), получить

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - \tau) [A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau, \quad (5.12)$$

или в развернутом виде

$$Y_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(T, \lambda, t - \tau) Y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - \tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau. \quad (5.13)$$

При $\lambda = 0$ отсюда получаются уравнения вынужденных периодических колебаний:

$$Y_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(T, t - \tau) Y_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^T \Phi(T, t - \tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau. \quad (5.14)$$

Если же положить в (12) $X_{\Pi}(t) = E$, где E — единичная матрица соответствующего размера, то получим уравнение для определения передаточной матрицы системы:

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - \tau) W_c(\lambda, \tau) d\tau + W(\lambda). \quad (5.15)$$

Кроме того, совершенно аналогично (1.14) выводится уравнение для СИЧХ системы:

$$\Phi_c(T, \lambda, t, t - \tau) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - q) \Phi_c(T, \lambda, q, q - \tau) dq + \Phi(T, \lambda, t - \tau). \quad (5.16)$$

В ряде задач целесообразно применить к системе (1) преобразование, аналогичное использованному в скалярном случае. Для этого положим в (1)

$$Z = KY + Z_1, \quad (5.17)$$

где K — произвольная постоянная матрица соответствующего размера. Тогда после несложных преобразований придем к новой системе уравнений, аналогичной (1.23):

$$Y = W_1(p) Z_1, \quad Z_1 = A_1(t) Y + X, \quad (5.18)$$

где

$$W_1(p) = [E - W(p)K]^{-1}W(p), \quad A_1(t) = A(t) - K. \quad (5.19)$$

Ниже будет показано, что при рациональном выборе матрицы K исследование системы (18) может оказаться более простым, чем исследование исходной системы (1).

Отметим, что матричный подход может оказаться удобным и при описании одноконтурных систем управления, содержащих более чем один нестационарный элемент.

Если передаточная матрица стационарной части системы $W(p)$ является дробно-рациональной, то приведенные выше интегральные уравнения можно решить точно, обобщая соответствующим образом метод решения, изложенный в предыдущих параграфах.

Перейдем к рассмотрению этого подхода. Относительно матрицы $W(p)$ предполагаем, что она представляется в виде

$$W(p) = \frac{M(p)}{d(p)} = \frac{M_1 p^{n-1} + M_2 p^{n-2} + \dots + M_n}{p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n}, \quad (5.20)$$

где M_i — постоянные матрицы. При этом для простоты изложения полагаем, что корни уравнения

$$d(p) = 0 \quad (5.21)$$

$p_1, \dots, p_n$ — простые,

Тогда справедливо разложение на простые дроби [17]

$$W(p) = \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{\rho} \frac{1}{p - p_{\rho}}, \quad (5.22)$$

где

$$\Gamma_{\rho} = \frac{M(p_{\rho})}{d'(p_{\rho})}. \quad (5.23)$$

Учитывая (22), находим весовую матрицу, соответствующую передаточной матрице $W(p)$:

$$H(t) = \begin{cases} \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{\rho} e^{p_{\rho} t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

На интервале времени $t_{i-1} < t < t_i$ исходная система уравнений (1) имеет вид (3), причем с учетом (20) передаточные функции $W_{i3}(p)$ могут быть представлены в виде

$$W_{i3}(p) = [E d(p) - M(p) A_i]^{-1} M(p). \quad (5.25)$$

В дальнейшем мы будем предполагать для простоты, что элементы матрицы $W_{i3}(p)$ имеют только простые полюсы, не совпадающие с корнем уравнения (21). При этом справедливо разложение на простые дроби:

$$W_{i3}(p) = \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{i\rho} \frac{1}{p - p_{i\rho}}, \quad (5.26)$$

где $p_{i\rho}$ — полюсы матрицы $W_{i3}(p)$.

Отметим теперь, что если умножить обе части равенства (25) справа на матрицу A_i и положить $p = p_{\alpha}$, где p_{α} — любой из корней уравнения (21), то получим

$$W_{i3}(p_{\alpha}) A_i = -E, \quad (5.27)$$

где E — единичная матрица соответствующего размера. С учетом разложения (26) формула (27) принимает вид

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\Gamma_{i\rho} A_i}{p_{\alpha} - p_{i\rho}} = -E \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (5.28)$$

Каждой из матриц (25) при выполнении (26) соответствует весовая матрица

$$H_{i3}(t) = \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{i\rho} e^{p_{i\rho} t}. \quad (5.29)$$

Используя приведенные вспомогательные соотношения, перейдем теперь сразу к задаче решения интегрального уравнения (12). Для этого отметим, что из (22) и (II.3.70) следует, что в рассматриваемом случае, аналогично (4.2),

$$\Phi(T, \lambda, t - \tau) = \begin{cases} R(T, \lambda, t - \tau + T) + e^{-\lambda(t-\tau)} H(t - \tau), & 0 < t - \tau < T, \\ R(T, \lambda, t - \tau + T), & -T < t - \tau < 0, \end{cases} \quad (5.30)$$

где

$$R(T, \lambda, t) = \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho} - \lambda)t}}{1 - e^{(p_{\rho} - \lambda)T}}. \quad (5.31)$$

С учетом (30) уравнение (12) можно представить в форме

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t - \tau) [A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^T R(T, \lambda, t - \tau + T) [A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (5.32)$$

Если в это уравнение подставить (31), то получим после интегрирования

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t - \tau) [A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ + \sum_{\rho=1}^n C_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{\rho} - \lambda)t}, \quad 0 < t < T, \quad (5.33)$$

где неизвестные матрицы $C_{1\rho}(\lambda)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} C_{1\rho}(\lambda) &= \\ &= \frac{\Gamma_{\rho} e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} \int_0^T e^{-(p_{\rho}-\lambda)\tau} [A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau, \quad (5.34) \\ &\rho = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

При $0 < t < t_1$ уравнение (33) равносильно следующему:

$$\begin{aligned} Y_{\Pi}(t) &= \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) [A_1(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau + \\ &+ \sum_{\rho=1}^n C_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{\rho}-\lambda)t}, \quad 0 < t < t_1. \quad (5.35) \end{aligned}$$

Уравнение (35) является матричным аналогом уравнения (4.7). Поэтому при решении уравнения (35) можно применить тот же путь рассуждений, который был использован при решении уравнения (4.7). Переходя в (35) к преобразованию Лапласа, получим

$$Y_{\Pi}(p) = W(p + \lambda) [A_1 Y_{\Pi}(p) + X_{\Pi}(p)] + F(p), \quad (5.36)$$

где $F(p) = L[F(t)]$,

$$F(t) = \begin{cases} \sum_{\rho=1}^n C_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{\rho}-\lambda)t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Решая это уравнение относительно $Y_{\Pi}(p)$, получаем

$$\begin{aligned} Y_{\Pi}(p) &= [E - W(p + \lambda) A_1]^{-1} W(p + \lambda) + \\ &+ [E - W(p + \lambda) A_1]^{-1} F(p). \quad (5.38) \end{aligned}$$

Если использовать легко проверяемое тождество

$$\begin{aligned} [E - W(p + \lambda) A_1]^{-1} &= \\ &= [E - W(p + \lambda) A_1]^{-1} W(p + \lambda) A_1 + E, \quad (5.39) \end{aligned}$$

то выражение для $Y_{\Pi}(p)$ можно, с учетом (39), представить в виде

$$Y_{\Pi}(p) = W_{13}(p + \lambda) [X_{\Pi}(p) + A_1 F(p)] + F(p), \quad (5.40)$$

откуда, переходя к оригиналам, получаем

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) A_1 F(\tau) d\tau + F(t). \quad (5.41)$$

Преобразуем два последних слагаемых в правой части последней формулы, учитывая, что функция $F(t)$ определяется равенством (37). Прежде всего, имеем с учетом (26) и (37)

$$S = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) A_1 F(\tau) d\tau = \\ = \int_0^t \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{1\rho} e^{(p_{1\rho}-\lambda)(t-\tau)} A_1 \sum_{k=1}^n C_{1k}(\lambda) e^{(p_k-\lambda)\tau} d\tau,$$

что в результате перемножения дает

$$S = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k} e^{(p_{1\rho}-\lambda)t} \int_0^t e^{(p_k-p_{1\rho})\tau} d\tau.$$

После интегрирования отсюда получаем

$$S = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{\Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k}}{p_k - p_{1\rho}} e^{(p_k-\lambda)t} - \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{\Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k}}{p_k - p_{1\rho}} e^{(p_{1\rho}-\lambda)t}.$$

При этом, если учесть тождество (27), то имеем, суммируя по ρ ,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{\Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k}}{p_k - p_{1\rho}} e^{(p_k-\lambda)t} = - \sum_{k=1}^n C_{1k} e^{(p_k-\lambda)t} = -F(t),$$

откуда следует, что

$$S = -F(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{\Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k}}{p_{1\rho} - p_k} e^{(p_{1\rho}-\lambda)t},$$

Подставляя это выражение в (41), получим окончательно:

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n D_{1\rho} e^{(p_{1\rho}-\lambda)t}, \quad (5.42)$$

$$0 < t < t_1,$$

где матрицы $D_{1\rho}$ связаны с матрицами $C_{1\rho}$ соотношениями

$$D_{1\rho} = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k}}{p_{1\rho} - p_k}. \quad (5.43)$$

Далее, продолжая решение на последующие интервалы времени, будем иметь

$$Y_{\Pi}(t) = \int_{t_{i-1}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) [A_i Y_{\Pi}(\tau) + X(\tau)] d\tau +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^n C_{i\rho} e^{(p_{i\rho}-\lambda)t}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (5.44)$$

где матрицы $C_{i\rho}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$C_{i\rho} = C_{1\rho} + \Gamma_{\rho} \int_0^{t_{i-1}} e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} [A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau =$$

$$= C_{i-1,\rho} + \Gamma_{\rho} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} [A_{i-1} Y_{\Pi}(\tau) + X_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (5.45)$$

Решение уравнения (44) при фиксированном i , полученное изложенным способом, имеет вид

$$Y_{\Pi}(t) = \int_{t_{i-1}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^n D_{i\rho} e^{(p_{i\rho}-\lambda)t}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (5.46)$$

причем

$$D_{i\rho} = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_{i\rho} A_i C_{ik}}{p_{i\rho} - p_k} e^{(p_k - p_{i\rho}) t_{i-1}}, \quad (5.47)$$

Используя (45) и (47), можно установить непосредственную связь между матрицами D_{ip} и C_{ip} . Она является линейной.

Выполняя изложенную вычислительную процедуру, можно построить искомое решение на интервале $0 < t < T$, которое будет зависеть от неизвестных матриц $C_{ip}(\lambda)$, $p = 1, 2, \dots, n$. Если после этого подставить найденные решения в соотношения (34), то придем к уравнениям вида

$$C_{ip} = \sum_{k=1}^n N_{pk}(\lambda) C_{ik} + D_p(\lambda), \quad (5.48)$$

где при заданном внешнем возмущении $X_{\Pi}(t)$ элементы матриц N_{pk} и D_p известным образом зависят от параметра λ .

Если определитель этой системы не равен нулю, то она имеет единственное решение, подставив которое в соотношения (46) мы найдем искомую функцию $Y_{\Pi}(t)$.

Если же определитель системы уравнений (48) обращается в нуль, то имеем случай резонанса, подробности которого здесь не рассматриваются. Мы не будем также выписывать подробно общих выражений для матриц $N_{pk}(\lambda)$ и $D_p(\lambda)$ ввиду их громоздкости, тем более что проведение соответствующих выкладок в конкретных задачах не связано с какими-либо принципиальными затруднениями. Сделаем также несколько замечаний.

1. Если в приведенных выше соотношениях положить $X_{\Pi}(t) = E$, то мы получим формулы для вычисления передаточной матрицы рассматриваемой многомерной системы.

2. Если же положить в полученных соотношениях $\lambda = 0$, то мы придем к формулам, определяющим вынужденные периодические колебания системы (1).

3. Если в (2) все матрицы A_i отличны от нулевой, то при решении практических задач целесообразно в исходной системе (1) совершить преобразование (17) и при этом положить

$$K = A_s, \quad (5.49)$$

где A_s — одна из матриц A_i ($i = 1, 2, \dots, m$). При этом имеем

$$Y = W_1(p) Z_1, \quad Z_1 = A_1(t) Y + X,$$

причем

$$W_1(p) = [E - W(p) A_s]^{-1} W(p),$$

$$A_1(t) = A_t - A_s, \quad t_{l-1} < t < t_l.$$

Если матрица K выбрана в соответствии с (49), то по крайней мере на интервале времени $t_{s-1} < t < t_s$ имеем $A_1 = 0$. При этом, как и в одномерном случае, уравнение вида (44) сразу дает

$$Y_{\Pi}(t) = \int_{t_{s-1}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) X_{\Pi}(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^n C_{s\rho} e^{(-\lambda + p_{s\rho})t}, \quad t_{s-1} < t < t_s, \quad (5.50)$$

причем по (46)

$$C_{s\rho} = D_{s\rho}. \quad (5.51)$$

При этом все последующие выкладки упрощаются. Кроме того, замену (49) целесообразно применять в резонансных случаях, когда среди корней уравнения (21) имеются равные $si\omega$ (резонансные).

4. Аналогичным образом можно обобщить на многомерный случай способ нахождения симметричных вынужденных колебаний, изложенных в § 3.

5. Изложенный способ непосредственно применим для нахождения СИЧХ рассматриваемой системы. Из (16) и (30) следует, что при $0 < t - \tau < T$ СИЧХ является решением уравнения

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - q) A(q) Y_{\Pi}(q) dq +$$

$$+ R(T, \lambda, t - \tau), \quad (5.52)$$

а при $-T < t - \tau < 0$ СИЧХ определяется уравнением

$$Y_{\Pi}(t) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - q) A(q) Y_{\Pi}(q) dq +$$

$$+ R(T, \lambda, t - \tau + T). \quad (5.53)$$

Для решения уравнений (52) и (53) без изменений можно использовать изложенный выше способ решения.

Пример 5.1. В качестве примера применения изложенного способа решения рассмотрим одноконтурную систему с двумя амплитудно-импульсными элементами II рода, работающими синхронно и синфазно. Уравнения системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= W_2(p) z_2, & z_2 &= a(t) y_1 + x_2, \\ y_1 &= W_1(p) z_1, & z_1 &= a(t) y_2 + x_1, \\ a(t) &= \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T, \end{cases} & a(t) &= a(t+T). \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Покажем, как определить передаточную матрицу системы (54) по отношению к входным сигналам x_1 и x_2 , используя матричный подход. Введем в рассмотрение диагональные матрицы

$$W(p) = \begin{vmatrix} W_1(p) & 0 \\ 0 & W_2(p) \end{vmatrix}, \quad A(t) = \begin{vmatrix} 0 & a(t) \\ a(t) & 0 \end{vmatrix}, \quad (5.55)$$

а также вектор-столбцы

$$Y = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{vmatrix}. \quad (5.56)$$

Тогда нетрудно проверить, что уравнения (5.4) могут быть переписаны в виде (1):

$$Y = W(p) Z, \quad Z = A(t) Y + X. \quad (5.57)$$

При этом, в соответствии с (54) и (55),

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, & 0 < t < t_1, \\ A(t) &= A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, & t_1 < t < T. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Можно также полагать, что Y , Z , X — квадратные матрицы вида

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}. \quad (5.59)$$

Уравнения (57) и (58) при этом сохраняются.

Если положить в (59)

$$X(t) = e^{\lambda t} E = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{vmatrix}. \quad (5.60)$$

то из (57) и (15) получим интегральное уравнение передаточной матрицы системы (54):

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - \tau) W_c(\lambda, \tau) d\tau + W(\lambda), \quad (5.61)$$

где

$$\Phi(T, \lambda, t - \tau) = \begin{vmatrix} \varphi_1(T, \lambda, t - \tau) & 0 \\ 0 & \varphi_2(T, \lambda, t - \tau) \end{vmatrix}. \quad (5.62)$$

При этом, в соответствии с (55),

$$\begin{aligned} W_{13}(p) &= [E - W(p) A_1]^{-1} W(p) = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)} & \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)} \\ \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)} & \frac{W_2(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.63)$$

и, кроме того,

$$W_{23}(p) = W(p). \quad (5.64)$$

Предположим теперь, что

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= \sum_{\rho=1}^n \alpha_{\rho} \frac{1}{p - p_{\rho}} = \frac{m_1(p)}{d_1(p)}, \\ W_2(p) &= \sum_{\rho=1}^m \beta_{\rho} \frac{1}{p - q_{\rho}} = \frac{m_2(p)}{d_2(p)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

где все числа p_{ρ} и q_{ρ} различные. Тогда, если обозначить

$$q_{\rho} = p_{n+\rho}, \quad \rho = 1, 2, \dots, m, \quad (5.66)$$

то по (55) будем иметь

$$W(p) = \sum_{\rho=1}^{n+m} \Gamma_{\rho} \frac{1}{p - p_{\rho}}, \quad (5.67)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\rho} &= \begin{vmatrix} \alpha_{\rho} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, & \rho \leq n, \\ \Gamma_{\rho} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_k \end{vmatrix}, & \rho = n + k, \\ & & k \leq m. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Кроме того, предполагается, что все корни уравнения

$$\Delta(p) = d_1(p) d_2(p) - m_1(p) m_2(p) = 0$$

простые и отличные от корней p_{ρ} . Тогда из (63) следует, что

$$W_{13}(p) = \sum_{\rho=1}^{n+m} \Gamma_{1\rho} \frac{1}{p - p_{1\rho}}, \quad (5.69)$$

где

$$\Gamma_{1\rho} = \frac{1}{\Delta'(p_{1\rho})} \begin{vmatrix} m_1(p_{1\rho}) d_2(p_{1\rho}) & m_1(p_{1\rho}) m_2(p_{1\rho}) \\ m_1(p_{1\rho}) m_2(p_{1\rho}) & m_2(p_{1\rho}) d_1(p_{1\rho}) \end{vmatrix}. \quad (5.70)$$

При этом, в соответствии с (22) и (29), имеем весовые матрицы:

$$H(t) = H_{23}(t) = \sum_{\rho=1}^{n+m} \Gamma_{\rho} e^{p_{\rho} t}, \quad H_{13}(t) = \sum_{\rho=1}^{n+m} \Gamma_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}. \quad (5.71)$$

На интервале $0 < t < t_1$ интегральное уравнение для передаточной матрицы получится из (35) при $X_n(t) = E$:

$$\begin{aligned} W_c(\lambda, t) &= \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) [A_1 W_c(\lambda, \tau) + E] d\tau + \\ &+ \sum_{\rho=1}^{n+m} c_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{\rho}-\lambda)t}, \quad 0 < t < t_1, \end{aligned} \quad (5.72)$$

причем матрицы $C_{1\rho}$ определяются соотношениями, получающимися из (34):

$$\begin{aligned} C_{1\rho} &= \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(-\lambda+p_{\rho})T}} \Gamma_{\rho} \int_0^T e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} [A(\tau) W_c(\lambda, \tau) + E] d\tau, \\ &\rho = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Соотношения (73) упрощаются, и после несложных преобразований имеем:

$$C_{1\rho} = \frac{e^{(p_\rho - \lambda)T}}{1 - e^{(p_\rho - \lambda)T}} \Gamma_\rho \int_0^{t_1} e^{-(p_\rho - \lambda)\tau} A_1 W_c(\lambda, \tau) d\tau + \Gamma_\rho \frac{1}{p - p_\rho}. \quad (5.74)$$

Решение уравнения (72), в соответствии с (42) и (43), имеет вид

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^{n+m} D_{1\rho} e^{(p_{1\rho} - \lambda)t}, \quad (5.75)$$

$$0 < t < t_1,$$

где

$$D_{1\rho} = \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\Gamma_{1\rho} A_1 C_{1k}}{p_{1\rho} - p_k}. \quad (5.76)$$

Если вычислить интеграл в равенстве (75), учитывая (29), то будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H_{13}(t-\tau) d\tau &= \sum_{\rho=1}^{n+m} \Gamma_{1\rho} e^{(p_{1\rho} - \lambda)t} \int_0^t e^{(\lambda - p_{1\rho})\tau} d\tau = \\ &= \sum_{\rho=1}^{n+m} \frac{\Gamma_{1\rho}}{\lambda - p_{1\rho}} - \sum_{\rho=1}^{n+m} \frac{\Gamma_{1\rho} e^{(p_{1\rho} - \lambda)t}}{\lambda - p_{1\rho}} = W_{13}(\lambda) - \sum_{\rho=1}^{n+m} \frac{\Gamma_{1\rho} e^{(-\lambda + p_{1\rho})t}}{\lambda - p_{1\rho}} \end{aligned}$$

и, следовательно, из (75)

$$W_c(\lambda, t) = W_{13}(\lambda) + \sum_{\rho=1}^{n+m} \left(D_{1\rho} - \frac{\Gamma_{1\rho}}{\lambda - p_{1\rho}} \right) e^{(p_{1\rho} - \lambda)t}, \quad (5.77)$$

$$0 < t < t_1.$$

Подставляя (77) и (76) в (74), после интегрирования получим искомую линейную систему уравнений для определения матриц $C_{1\rho}(\lambda)$. После решения этой системы выражение передаточной матрицы на интервале $0 < t < t_1$ получится путем подстановки в (77) найденных значений матрицы $C_{1\rho}(\lambda)$.

Выражение передаточной матрицы на интервале $t_1 < t < T$ может быть получено из уравнения

$$W_c(\lambda, t) = \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) A_1 W_c(\lambda, \tau) d\tau + \\ + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^{n+m} C_{1\rho}(\lambda) e^{(p_\rho - \lambda)t}, \quad (5.78)$$

где в правой части фигурирует найденное решение (77).

Отметим теперь, что изложенный метод решения может оказаться полезным при изучении часто встречающихся в практических задачах линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть имеем дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n a_k(t) y^{(n-k)} = x, \quad (5.79)$$

где функции $a_k(t)$ — периодические и кусочно-постоянные, т. е.

$$\left. \begin{aligned} a_k(t) &= a_k(t+T), & a_k(t) &= a_{ki}, \\ t_{i-1} < t < t_i, & t_0 = 0, & t_m = m, \end{aligned} \right\} \quad (5.80)$$

a_{ki} — постоянные.

На каждом из интервалов времени $t_{i-1} < t < t_i$ уравнение (79) превращается в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n a_{ki} y^{(n-k)} = x, \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (5.81)$$

Интегрируя уравнения (81) последовательно и сшивая их решения из условия непрерывности $y, y^1, \dots, y^{(n-1)}$, в принципе можно получить решение уравнения (79), что, как правило, связано с весьма громоздкими вычислениями [40].

В ряде случаев соответствующие выкладки можно упростить, если свести уравнение (79) к некоторой

эквивалентной многомерной системе вида (1). Процедура такого сведения заключается в следующем. Обозначим

$$\left. \begin{aligned} d(p) &= p^n + \sum_{k=1}^n a_{k1} p^{n-k}, \\ m_i(p) &= \sum_{k=1}^n (a_{k1} - a_{ki}) p^{n-k}, \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.82)$$

и введем в рассмотрение функции

$$g_i(t) = g_i(t+T), \quad g_i(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_{i-1}, \\ 1, & t_{i-1} < t < t_i, \\ 0, & t_i < t < T. \end{cases} \quad (5.83)$$

Тогда уравнение (81) сведется к следующему:

$$d(p)y = \sum_{i=1}^m g_i(t) m_i(p) y + x. \quad (5.84)$$

Обозначим теперь

$$z_i = m_i(p)y, \quad W_i(p) = \frac{m_i(p)}{d(p)}. \quad (5.85)$$

Тогда из (84) получим

$$z_i = W_i(p)u, \quad u = \sum_{i=1}^m g_i(t) z_i + x. \quad (5.86)$$

Нетрудно убедиться, что (86) можно рассматривать как уравнения многомерной системы с периодической коммутацией параметров, и для ее исследования можно применить соображения, изложенные выше. Приведенный способ особенно удобен, если коэффициенты уравнения (79) переключаются в течение периода только один раз и одновременно. В этом случае система (8) сводится к простейшей одноконтурной системе с ключом, рассмотренной ранее. Действительно, пусть вместо (80) имеем

$$a_k(t) = \begin{cases} a_{k1}, & 0 < t < t_1, \\ a_{k2}, & t_1 < t < T. \end{cases} \quad (5.87)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} d(p) &= p^n + \sum_{k=1}^n a_{k2} p^{n-k}, \\ m(p) &= \sum_{k=1}^n (a_{k2} - a_{k1}) p^{n-k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

Тогда уравнение (79) примет вид

$$d(p) y = a(t) m(p) y + x, \quad (5.89)$$

где функция $a(t)$ определяется по (II.6.61). Полагая

$$m(p) y = z, \quad (5.90)$$

из (89) получаем

$$z = W(p) u, \quad u = a(t) z + x, \quad (5.91)$$

где

$$W(p) = \frac{m(p)}{d(p)}. \quad (5.92)$$

Используя формулы § 4, можно получить передаточную функцию от x к z , после чего передаточная функция W_{yx} от x к y определится соотношением, вытекающим из (90):

$$W_{yx}(p, t) = \int_0^T \varphi_m(T, p, t - \tau) W_{zx}(p, \tau) d\tau, \quad (5.93)$$

где

$$\varphi_m(T, p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m(p + ki\omega)} e^{kit\omega}. \quad (5.94)$$

Отметим также, что если в правой части уравнения (79) стоит выражение

$$x = W_2(p, t) v \quad (5.95)$$

и найдена передаточная функция W_{yx} , то по (II.6.29) передаточная функция от v к y равна

$$W_{yv}(p, t) = \int_0^T \varphi_{yx}(T, p, t, t - \tau) W_2(p, \tau) d\tau, \quad (5.96)$$

где φ_{yx} — соответствующая СИЧХ.

§ 6. Устойчивость линейных систем с периодической коммутацией параметров

Если передаточная матрица стационарной части системы (5.1) является дробно-рациональной и имеет вид (5.20), то система (5.1) эквивалентна некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими кусочно-постоянными коэффициентами. Поэтому, как вытекает из общей теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, условием устойчивости системы (5.1) при выполнении (5.20) будет выполнение неравенств

$$\operatorname{Re} p_k < 0, \quad (6.1)$$

где p_k — характеристические показатели системы.

Используя соображения предыдущего параграфа, легко построить характеристическое уравнение, корнями которого являются характеристические показатели p_k .

По определению характеристические показатели — это такие числа λ , что уравнения (5.1) в отсутствие внешнего возбуждения имеют решения вида

$$Y = e^{\lambda t} Y_{\pi}(t), \quad Y_{\pi}(t) = Y_{\pi}(t + T). \quad (6.2)$$

Если решение вида (2) существует, то $Y_{\pi}(t)$ является решением интегрального уравнения, получающегося из (5.12) при $X_{\pi}(t) = 0$:

$$Y_{\pi}(t) = \int_0^T \Phi(T, \lambda, t - \tau) A(\tau) Y_{\pi}(\tau) d\tau. \quad (6.3)$$

Поэтому характеристические показатели системы (5.1) могут быть определены как такие значения λ , при которых однородное уравнение (3) имеет нетривиальные решения.

Если предположить, что условие (5.20) выполнено, то для решения уравнения (3) можно применить способ, изложенный в предыдущем параграфе. При этом из (5.33) и (5.34) вытекает, что уравнение (3) эквивалентно следующему:

$$Y_{\pi}(t) = \int_0^T e^{-\lambda(t-\tau)} H(t-\tau) A(\tau) Y_{\pi}(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n C_{1\rho}(\lambda) e^{(p_{\rho}-\lambda)t}, \quad (6.4)$$

причем

$$C_{1\rho}(\lambda) = \frac{\Gamma_{\rho} e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} \int_0^T e^{(\lambda-p_{\rho})\tau} A(\tau) Y_{\Pi}(\tau) d\tau. \quad (6.5)$$

Повторяя выкладки, приведшие к системе уравнений (5.48) для определения матриц $C_{1\rho}(\lambda)$, получим, что в рассматриваемом случае матрицы $C_{1\rho}(\lambda)$ являются решениями однородной системы, получающейся из (5.48) при $D_{\rho} = 0$:

$$C_{1\rho}(\lambda) = \sum_{k=1}^n N_{\rho k}(\lambda) C_{1k}(\lambda). \quad (6.6)$$

Если обозначить через $\Delta(\lambda)$ определитель этой системы, то, очевидно, условие разрешимости уравнений (6),

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (6.7)$$

и даст нам искомое характеристическое уравнение.

Используя соотношения предыдущего параграфа, легко убедиться, что фактически левая часть уравнения (7) является функцией аргумента

$$z = e^{\lambda T}. \quad (6.8)$$

Поэтому, переходя к переменной z , вместо уравнения (7) получим характеристическое уравнение в виде

$$\Delta(z) = 0; \quad (6.9)$$

при этом левая часть уравнения (9) фактически является отношением двух многочленов от z . Отсюда следует, что в конечном итоге уравнение (9) всегда сводится к алгебраическому уравнению относительно переменной z . При этом условием устойчивости будет расположение его корней внутри единичного круга

$$|z_k| < 1. \quad (6.10)$$

В частном случае одноконтурной системы с одним нестационарным элементом характеристическое уравнение может быть получено более простым путем непосредственно из (4.14), так как (повторя приведенные рассуждения) легко показать, что характеристические показатели определяются из условия существования

нетривиальных решений однородной системы, получающейся из (4.14) при $\delta_p(\lambda) = 0$:

$$c_{1p}(\lambda) = \sum_{k=1}^n \mu_{pk}(\lambda) c_{1p}(\lambda),$$

откуда следует, что характеристическое уравнение имеет вид

$$\det |\delta_{ik} - \mu_{pk}(\lambda)| = 0, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (6.11)$$

После перехода к переменной z уравнение (11) также сводится к алгебраическому.

Пример 6.1. Найдем условия устойчивости простейшей системы, рассмотренной в примере 4.2.

Из (11) и (4.32) сразу получаем, что характеристическое уравнение имеет вид

$$1 - e^{(\alpha - \lambda)T} e^{-t_1} = 0, \quad (6.12)$$

откуда имеем, что система устойчива, если

$$\alpha T - t_1 < 0. \quad (6.13)$$

§ 7. Амплитудно-импульсные системы с модуляцией I и II рода

Используя материал предыдущих параграфов, а также гл. IV, можно построить общий способ исследования импульсных систем, содержащих в своем составе амплитудно-импульсные элементы I и II рода, а также линейные стационарные элементы с сосредоточенными параметрами.

Задача исследования систем такого класса важна сама по себе; кроме того, она тесно связана с задачей исследования устойчивости периодических колебаний многих нелинейных систем с разрывными характеристиками, которая будет рассмотрена в последующих главах.

Отметим, что в гл. IV рассматривались системы, содержащие амплитудно-импульсные элементы I и II рода в одном контуре. В настоящем параграфе указанный класс систем рассматривается без всяких ограничений на структуру.

Основная идея подхода, излагаемого в этом параграфе, использует соображения § 5 гл. IV, так как любую систему рассматриваемого типа можно свести к одноконтурной. Действительно, все замкнутые контуры в таких системах, не содержащие импульсных элементов, являются системами с периодической коммутацией параметров, стационарные элементы которых имеют сосредоточенные параметры. Поэтому с помощью изложенных способов всегда можно построить передаточные функции всех замкнутых контуров рассматриваемой системы, не содержащих импульсных элементов. После этого с помощью соображений § 5 гл. IV всегда можно найти передаточную функцию (или передаточную матрицу) изучаемой системы.

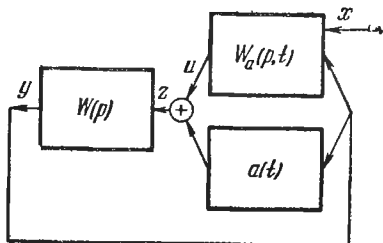


Рис. 32.

Проиллюстрируем сказанное простыми примерами.

Пример 7.1. Пусть рассматриваемая система (рис. 32) описывается уравнениями

$$y = W(p) z, \quad z = a(t) y + W_a(p, t) (y + x), \quad (7.1)$$

где функция $a(t)$ определяется по (1.2), $W_a(p, t)$ — передаточная функция амплитудно-импульсного элемента I рода. Для конкретности предположим, что $W_a(p, t)$ определяется формулой (IV.1.7). Если положить

$$W_a(p, t) (y + x) = u, \quad (7.2)$$

то уравнения (1) примут вид

$$y = W(p) z, \quad z = a(t) y + u. \quad (7.3)$$

Поэтому, найдя передаточную функцию $W_{yu}(p, t)$ системы (3) от u к y и используя формулы § 4, вместо (3) получим

$$y = W_{yu}(p, t) u. \quad (7.4)$$

Подставляя в (4) выражение для u (2), находим

$$y = W_{yu}(p, t) u, \quad u = W_a(p, t) (y + x), \quad (7.5)$$

что соответствует структурной схеме, изображенной на рис. 33. Передаточную функцию этой системы $W_{yx}(p, t)$ можно найти сразу, используя формулу (IV.4.17). Имеем

$$W_{yx}(p, t) = \frac{W_p(p, t)}{1 - W_p(p, 0)} = \frac{\int_0^T \varphi_{yu}(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau}{1 - \int_0^T \varphi_{yu}(T, p, 0, -\tau) W_a(p, \tau) d\tau}. \quad (7.6)$$

откуда следует, что для определения передаточной функции W_{yx} необходимо знать не только передаточную

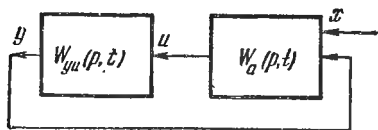


Рис. 33.

функцию W_{yu} , но и соответствующую ей СИЧХ $\varphi_{yu}(T, p, t, t - \tau)$.

Пример 7.2. Рассмотрим частный случай системы (1), когда

$$W(p) = -\frac{1}{p - a} \quad (7.7)$$

и функция $a(t)$ имеет вид (II.6.61). В этом случае передаточная функция $W_{yu}(p, t)$ имеет вид (4.33), (4.34), а соответствующая СИЧХ $\varphi_{yu}(T, p, t, t - \tau)$ определяется соотношениями примера 4.4. Если предположить дополнительно, что импульсный элемент I рода представляет собой фиксатор нулевого порядка и

$$W_a(p, t) = e^{-pt}, \quad 0 < t < T, \quad (7.8)$$

то учитывая соотношения примера 4.4, а также формулы (6), (8), после ряда преобразований найдем требуемую передаточную функцию. При этом при вычислениях следует иметь в виду, что СИЧХ $\varphi_{yu}(T, p, t, t - \tau)$

задается в квадрате $0 < t, \tau < T$ различными соотношениями в зависимости от величин t, τ . На рис. 34 квадрат $0 < t, \tau < T$ разбит на 6 областей, в которых соответственно

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I} & 0 < \tau < t < t_1; \\ \text{II} & 0 < t < \tau < t_1; \\ \text{III} & t_1 < \tau < T, \quad 0 < t < t_1; \\ \text{IV} & 0 < \tau < t_1, \quad t_1 < t < T; \\ \text{V} & t_1 < \tau < t < T; \\ \text{VI} & t_1 < t < \tau < T. \end{array} \right\} \quad (7.9)$$

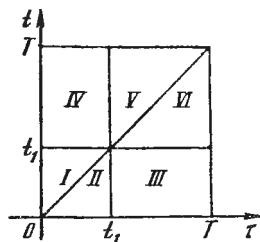


Рис. 34.

Выражения СИЧХ в каждой из областей даются соответствующими выражениями примера 4.4. Поэтому при вычислении интеграла

$$W_p(p, t) = \int_0^T \varphi_{yu}(T, p, t, t - \tau) W_a(p, \tau) d\tau$$

и $0 < t < t_1$ интегрирование происходит по областям I, II и III, а при $t_1 < t < T$ — соответственно по областям IV, V и VI.

Используя указанные соображения, имеем, в частности, для данного примера при $0 < t < t_1$

$$\begin{aligned} W_p(p, t) &= \int_0^T \varphi_{yu}(T, p, t, t - \tau) e^{-p\tau} d\tau = \\ &= - \frac{1}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}} \left[\int_0^t e^{(\alpha-1-p)(t-\tau)} e^{-p\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_1} e^{(\alpha-1-p)(t-\tau)} e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1} e^{-p\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^T e^{(\alpha-p)(T-\tau)} e^{(\alpha-1-p)t} e^{-p\tau} d\tau \right] d\tau. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов приходим к выражению

$$W_p(p, t) = \frac{e^{-pt}}{\alpha - 1} + \frac{e^{(\alpha-1-p)t}}{\alpha - 1} \frac{e^{(\alpha-p)T} e^{-\alpha t_1} - 1}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}} - \\ - \frac{e^{(\alpha-1-p)t}}{\alpha} \frac{e^{(\alpha-p)T} e^{-\alpha t_1} - e^{-pT}}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}}, \quad 0 < t < t_1. \quad (7.10)$$

Аналогичные вычисления дают также

$$W_p(p, t) = \frac{e^{-pt}}{\alpha} + \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha} \frac{e^{-pT} e^{-t_1} - e^{-\alpha t_1}}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}} + \\ + \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha - 1} \frac{e^{-\alpha t_1} - e^{-t_1}}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}}, \quad t_1 < t < T. \quad (7.11)$$

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости рассматриваемого класса систем. Можно доказать, что при выполнении предположений, сформулированных в начале этого параграфа, необходимым и достаточным условием устойчивости является выполнение неравенств

$$\operatorname{Re} p_{sk} < 0,$$

где p_{sk} — характеристические показатели системы. Этот факт вытекает, например, из результатов работы [4]. Поэтому для исследования устойчивости в нашем случае достаточно ограничиться рассмотрением характеристического уравнения, которое легко может быть построено методами, изложенными в § 7 гл. IV.

При этом можно показать, что получаемое характеристическое уравнение всегда фактически будет зависеть от аргумента $z = e^{pT}$. Переход к этому аргументу в конечном итоге приведет к алгебраическому уравнению относительно z . При этом условием устойчивости будет являться выполнение неравенств (6.10).

Пример 7.3. В соответствии с (IV.7.30) характеристическое уравнение для системы (1) имеет вид

$$1 - W_p(p, 0) = 0 \quad (7.12)$$

или, что эквивалентно,

$$1 - \int_0^T \varphi_{yu}(T, p, 0, -\tau) W_a(p, \tau) d\tau = 0. \quad (7.13)$$

Пример 7.4. При выполнении предположений примера 7.2 характеристическое уравнение (12) с учетом (10) приводится к виду

$$1 - \frac{e^{(\alpha-p)T}}{\alpha-1} \frac{e^{-\alpha t_1} - e^{-t_1}}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}} + \frac{1}{\alpha} \frac{e^{(\alpha-p)T} e^{-\alpha t_1} - e^{-pT}}{1 - e^{(\alpha-p)T} e^{-t_1}} = 0$$

или, при переходе к переменной z ,

$$z = e^{\alpha T} e^{-t_1} + \frac{e^{\alpha T}}{\alpha-1} (e^{-\alpha t_1} - e^{-t_1}) + \frac{1 - e^{\alpha(T-t_1)}}{\alpha},$$

откуда в соответствии с (6.10) получаем условие устойчивости:

$$\left| e^{\alpha T} e^{-t_1} + \frac{e^{\alpha T}}{\alpha-1} (e^{-\alpha t_1} - e^{-t_1}) + \frac{1 - e^{\alpha(T-t_1)}}{\alpha} \right| < 1. \quad (7.14)$$

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЛЕЙНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Вводные замечания

Шестая глава посвящена задачам нахождения периодических режимов движения широкого класса релейных и нелинейных импульсных систем, а также исследования устойчивости этих режимов. Изложенный в главе подход обобщает известные результаты А. И. Лурье и Я. З. Цыпкина.

В главе введен в рассмотрение общий класс дискретных нелинейностей, описываемых нелинейными операторами, сопоставляющими любому непрерывному сигналу выходной сигнал в виде некоторой последовательности прямоугольных импульсов. В зависимости от свойств и моментов переключения дискретные нелинейности подразделяются на релейные, релейно-импульсные и импульсные. При решении задачи о нахождении периодического режима используется то обстоятельство, что в режиме установившихся периодических колебаний форму выходного сигнала дискретного элемента в некотором смысле можно считать известной. Это позволяет свести задачу к рассмотрению некоторой трансцендентной системы уравнений относительно неизвестных моментов переключения.

Вопрос об устойчивости периодического режима сводится к рассмотрению уравнений в вариациях, аналогичных классическим, но видоизмененных в соответствии с разрывностью задачи. Формальная процедура составления уравнений в вариациях достаточно проста и сводится для дискретных нелинейностей к следующему. Пусть в одном из контуров системы имеется дискретная нелинейность

$$y = U_d(x), \quad (0.1)$$

причем в периодическом режиме, когда

$$y = y_n(t) = y_n(t + T), \quad x = x_n(t) = x_n(t + T), \quad (0.2)$$

имеем

$$y_n(t) = U_n[x_n(t)]. \quad (0.3)$$

Тогда варьированное уравнение дискретного элемента (1) имеет вид

$$y_1 = \frac{D}{\partial \alpha} U_n[x_n(t) + \alpha x_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}, \quad (0.4)$$

где $\frac{D}{\partial \alpha}$ — оператор обобщенного дифференцирования по параметру. Линейные элементы и гладкие нелинейности при этом варьируются обычным способом.

В конечном итоге, применяя изложенную процедуру варьирования, можно прийти к уравнениям некоторой нестационарной периодической импульсной системы, которая может быть исследована методами гл. IV. В зависимости от устойчивости или неустойчивости уравнений в вариациях решается в общем случае и вопрос об устойчивости найденного периодического режима. Изложенный подход иллюстрируется в главе решением ряда примеров, имеющих практическое значение. Помимо иллюстрации общей теории, приведенные примеры имеют самостоятельное значение, так как для некоторых из них точное решение дается впервые, а другие рассматриваются при более общих предположениях, чем это делалось ранее.

§ 1. Релейные и нелинейные импульсные системы

В настоящем параграфе дается математическое описание релейных и импульсных элементов как нелинейных операторов определенного класса и рассматриваются некоторые типовые структурные схемы релейных и нелинейных импульсных систем.

В технических приложениях рассматривается и применяется большое число релейных элементов. Весьма распространенными, в частности, являются элементы, имеющие обобщенную симметричную релейную характеристику, изображенную на рис. 35.

На рис. 35 коэффициент k_p характеризует величину сигнала, поступающего с реле; σ_0 определяет зону нечувствительности реле; параметр μ называется

коэффициентом возврата. На рис. 36, заимствованном из [102], приводятся виды характеристик релейных элементов при различных значениях коэффициента возврата μ .

Другим важным типом релейных характеристик являются характеристики с переменной величиной зоны нечувствительности (рис. 37). Здесь выходной сигнал во времени равен

$$y(t) = \pm k_p, \quad t_{i-1} < t < t_i; \quad (1.1)$$

при этом фактически моменты переключения реле являются некоторыми функционалами от входного сигнала:

$$t_i = t_i[x(t)]. \quad (1.2)$$

Частным случаем такого реле является характеристика, изображенная на рис. 38 и применяемая в экстремальных системах [54].

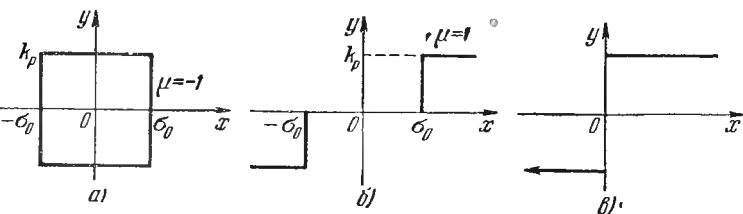


Рис. 36.

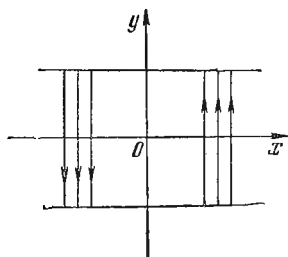


Рис. 37.

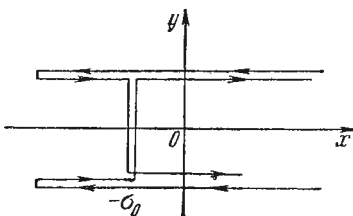


Рис. 38.

В некоторых системах управления применяются несимметричные релейные элементы. Примеры таких элементов изображены на рис. 39.

В самом общем случае математически произвольный *релейный элемент* с одним входом и одним выходом можно описать следующим образом. Предположим, что для любого входного сигнала $x(t)$ рассматриваемого класса можно определить однозначно ступенчатую функцию

$$y(t) = k_i \quad \text{при} \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (1.3)$$

где $k_i[x(t)]$ — некоторые числа, зависящие от свойств входного сигнала, а t_i определяются соотношением (2).

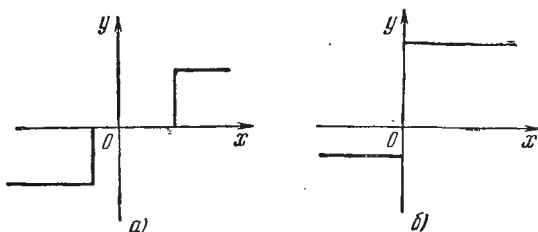


Рис. 39.

В дальнейшем числа t_i так же, как и для простейшего реле, будем называть *моментами переключения*, а соотношения (2) будем называть *условиями переключения*. Тогда условия

$$k_i = k_i[x(t)], \quad t_i = t_i[x(t)] \quad (1.4)$$

и определяют некоторый релейный элемент.

С математической точки зрения такой обобщенный релейный элемент представляет собой некоторый нелинейный оператор

$$y(t) = U_d[x(t)], \quad (1.5)$$

который каждому входному сигналу $x(t)$ сопоставляет некоторую ступенчатую функцию. Например, для идеального реле, изображенного на рис. 36, в

$$k_i = k_p \operatorname{sign} x(t), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (1.6)$$

а моменты переключения определяются условиями переключения

$$x(t_i) = 0. \quad (1.7)$$

В дальнейшем, не оговаривая этого особо, мы будем рассматривать только такие релейные элементы, для которых из периодичности входного сигнала $x(t)$ следует периодичность выходного сигнала $y(t)$. Говоря точнее, мы будем предполагать, что из условия $x(t) = x(t + T)$ вытекает

$$y(t) = y(t + T_1), \quad (1.8)$$

причем

$$\frac{T}{T_1} = \frac{m}{n}, \quad (1.9)$$

где m и n — целые числа, вообще говоря, зависящие от $x(t)$. В большинстве практических случаев $m = n$, т. е.

$$T = T_1. \quad (1.10)$$

Однако (10) имеет место не всегда. Например, как показано ниже, для реле, изображенного на рис. 38, может быть $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейных импульсных элементов. В этом параграфе, не оговаривая особо, для простоты изложения будем рассматривать только импульсные элементы, вырабатывающие прямоугольные импульсы, так как более сложную форму импульсов можно учесть введением в структурную схему системы специального множительного или формирующего устройства.

Будем говорить, что оператор (5) определяет *импульсный элемент*, если в соотношениях (4) моменты переключения t_i не зависят от входного сигнала. Таким образом, выходная координата обобщенного импульсного элемента определяется формулой

$$y(t) = k_i [x(t)], \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (1.11)$$

где все числа t_i предполагаются известными.

Например, для идеального импульсного элемента

$$k_i = kx(iT), \quad t_i = iT. \quad (1.12)$$

Для импульсного элемента, осуществляющего нелинейную амплитудную модуляцию, имеем

$$k_i = f[x(iT)], \quad t_i = iT, \quad (1.13)$$

где f — некоторая однозначная нелинейная функция, и т. п.

Наконец, если в соотношениях (4) некоторые из моментов переключения известны заранее, а некоторые определяются соотношениями вида (2), то соответствующий элемент будем называть *релейно-импульсным*. В дальнейшем, не оговаривая этого особо, мы будем предполагать, что для рассматриваемых импульсных и релейно-импульсных элементов при периодическом входном сигнале выполняются соотношения (8) и (9).

Следует отметить, что используемая здесь терминология несколько отличается от общепринятой.

Рассмотрим, например, широтно-импульсную модуляцию [10], при которой

$$y(t) = \begin{cases} k_p \operatorname{sign} x(nT), & nT < t < nT + t_{1n}, \\ 0 & nT + t_{1n} < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (1.14)$$

причем

$$0 < t_{1n} = \gamma[x(nT)] \leq T, \quad (1.15)$$

где $\gamma(x)$ — некоторая функция.

Очевидно, что при произвольном входном сигнале выход $y(t)$ будет ступенчатой функцией, принимающей значения 0 и $\pm k_p$, причем будут две последовательности моментов переключений: $t_n = nT$ и $t'_n = nT + t_{1n}$, первая из которых не зависит от свойств входного сигнала, а вторая — зависит. Поэтому по нашей классификации звено, осуществляющее широтно-импульсную модуляцию, является релейно-импульсным.

Наоборот, системы с так называемой частотно-импульсной модуляцией (ЧИМ) [44, 45] в большинстве случаев относятся по нашей классификации к релейным системам. Например, один из видов частотно-импульсных модуляторов описывается уравнениями

$$y = k_p \operatorname{sign} x(t_n), \quad t_{n-1} < t < t_n, \quad (1.16)$$

где t_n — некоторый функционал, зависящий от входного сигнала. В частности, [44], t_n может определяться уравнением

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} |x(t)| dt = \varepsilon, \quad (1.17)$$

где g — заданное число, или

$$t_n = t_{n-1} + q[x(t_{n-1})], \quad (1.18)$$

где q — некоторая нелинейная функция.

Очевидно, что рассмотренные частотно-импульсные элементы по нашей классификации являются релейными.

В настоящей главе мы будем рассматривать системы, которые помимо релейных, импульсных или релейно-импульсных элементов рассмотренного типа содержат произвольные линейные периодические звенья с известными передаточными функциями, а также произвольные безынерционные нелинейные преобразователи, соединенные последовательно, параллельно или обратной связью. При этом всегда будет предполагаться, что все линейные периодические звенья системы имеют соизмеримые периоды (т. е. находящиеся в дробно-рациональном отношении). В этом случае, не теряя общности, можно считать, что все указанные линейные элементы имеют общий период, равный наименьшему общему кратному периодов элементов.

В дальнейшем для краткости мы будем называть рассмотренные виды релейных, импульсных и релейно-импульсных элементов *дискретными операторами* или *нелинейностями* (ДН). При этом соотношения (4) или (5) будут представлять собой общую запись таких операторов.

Все операторы вида (5) можно разделить на стационарные и нестационарные. Стационарные операторы характеризуются тем, что для них

$$y(t - \tau) = U_d[x(t - \tau)] \quad (1.19)$$

для любого вещественного τ . Релейные элементы могут быть стационарными и нестационарными, а импульсные и релейно-импульсные элементы нестационарны в силу введенных определений. В дальнейшем для нестационарных ДН мы сохраним обозначение (5), предполагая, что существует такое T , что

$$U_d[x(t)]_{(t+T)} = U_d[x(t + T)]. \quad (1.20)$$

Дискретные нелинейности, удовлетворяющие условию (20) будем называть *периодическими*, а число T , фигурирующее в (20), — *периодом элемента*.

Отметим также, что если в (4) и (5) считать, что y , x и k_i — векторы или матрицы соответствующих размеров, то (5) будет представлять собой формальную запись многомерного ДН-элемента. В этом случае будем писать, соответственно,

$$Y = U_d [X(t)]. \quad (1.21)$$

В дальнейшем везде будут рассматриваться системы, содержащие стационарные либо нестационарные периодические дискретные нелинейные элементы. В этом последнем случае всегда предполагается, что все нестационарные дискретные нелинейности так же, как и линейные элементы системы, имеют соизмеримые периоды, причем наименьшее общее кратное этих периодов соизмеримо с наименьшим общим кратным периодов линейных нестационарных элементов системы. При этом, не ограничивая общности, можно полагать, что все нестационарные элементы системы имеют общий период.

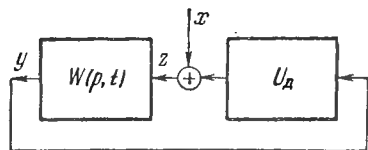


Рис. 40.

Если все элементы, входящие в систему (как линейные, так и нелинейные), являются стационарными, то такую систему будем также называть *автономной*. Если же хотя бы один элемент системы нестационарный, то и вся система в целом является нестационарной. В этом случае система называется *неавтономной*.

Простейшим примером систем рассматриваемого типа является система, изображенная на рис. 40, где U_d — дискретная нелинейность, $W(p, t)$ — передаточная функция линейной части системы.

Уравнения рассматриваемой системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y &= W(p, t) z, & z &= U_d [y(t)] + x, \\ W(p, t) &= W(p, t + T), & U_d [y(t)]_{t+T} &= U_d [y(t + T)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Система (22) будет стационарной только в том случае, когда оба элемента системы стационарны. Тогда

$$y = W(p) z, \quad z = U_d [y(t)] + x. \quad (1.23)$$

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что выходная координата линейной части $y(t)$ в уравнениях (22) и (23) является непрерывной функцией t и имеет в моменты переключения t_i конечные левую и правую производные $\dot{y}(t_i \pm 0)$. В частности, если $W(p, t) = W(p)$ и имеет вид (II.2.23), то сформулированные предположения выполняются, если разность степеней

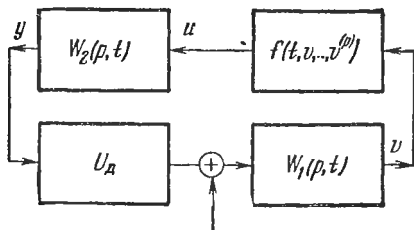


Рис. 41.

числителя и знаменателя равна единице, а $x(t)$ — обыкновенная интегрируемая функция. Если степень знаменателя превышает степень числителя больше чем на единицу, то производная $\dot{y}(t)$ будет непрерывной.

Можно также рассматривать более общие системы, например изображенную на рис. 41. Уравнения такой системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p, t) u, & u &= f(t, v, \dot{v}, \dots, v^{(p)}), \\ v &= W_1(p, t) z, & z &= U_d[y(t)] + x, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} W_i(p, t) &= W_i(p, t + T), & i &= 1, 2, \\ f(t, v, \dot{v}, \dots, v^{(p)}) &= f(t + \tau, v, \dot{v}, \dots, v^{(p)}), \\ U_d[y(t)]_{(t+T)} &= U_d[y(t + T)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Функция f предполагается непрерывной по всем аргументам. При этом в системе должны выполняться условия непрерывности величин $v, \dot{v}, \dots, v^{(p-1)}$. Величина $v^{(p)}$ может претерпевать разрывы, но тогда следует дополнительно определить функцию f в моменты разрыва $v^{(p)}$.

Выше были рассмотрены одноконтурные системы, содержащие один дискретный нелинейный элемент. Если

полагать, например, что x, y, u, v в (24) — неизвестные матрицы и W_1, W_2 — соответствующие передаточные матрицы, f — соответствующий многомерный элемент, то мы получим матричное обобщение рассматриваемой системы. Аналогично можно изучать системы, содержащие в цепи несколько дискретных элементов. Часто такие системы удобно рассматривать как многомерные.

§ 2. Периодические колебания релейных и импульсных систем

Характерной особенностью релейных и нелинейных импульсных систем является возможность возникновения в них периодических режимов различной природы.

Если исходная система автономна, то периодические режимы, возникающие в ней в отсутствие внешнего возбуждения, являются автоколебаниями.

В неавтономных системах при отсутствии внешнего возбуждения могут возникать периодические колебания с периодом, соизмеримым с периодом нестационарных элементов системы. Физически это соответствует параметрическому возбуждению колебаний. При этом задачу исследования всегда можно свести к определению периодических колебаний с периодом, равным периоду нестационарных элементов.

Наконец, при воздействии на систему внешнего периодического возбуждения с периодом, соизмеримым с периодом элементов системы, в ней могут возникнуть вынужденные периодические колебания. При этом в принципе, не ограничивая общности, такую задачу можно свести к случаю, когда периоды внешнего возбуждения, изменения параметров системы и вынужденных колебаний совпадают.

В этом параграфе излагается общий способ определения периодических режимов движения рассматриваемого класса релейных и импульсных систем, использующий подход, принадлежащий А. И. Лурье [47] и Я. З. Цыпкину [102].

Этот подход заключается в использовании специфического свойства дискретных нелинейностей, заключающегося в том, что в периодическом режиме форму выходного

сигнала такой нелинейности в некотором смысле можно считать известной.

Действительно, предположим, что на нелинейный дискретный элемент

$$y = U_d[x(t)] \quad (2.1)$$

поступает входной сигнал $x(t) = x(t + T)$, причем $y(t) = y(t + T)$; тогда, в силу исходного определения дискретной нелинейности,

$$\left. \begin{aligned} U_d[x(t)] &= k_s[x(t)], & t_{s-1} < t < t_s, \\ s &= 1, 2, \dots, m, & t_m = t_0 + T. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Последовательность чисел $k_s(x)$, сменяющих друг друга за период, мы будем называть *типом периодического выходного сигнала*. В дальнейшем мы будем всегда считать, что число переключений за период конечно. Если числа k_s можно пронумеровать, то тип входного сигнала можно выразить последовательностью номеров чисел k_s , сменяющих друг друга за период.

Пример 2.1. Если рассмотреть выходные сигналы идеального реле, вызванные входными сигналами $x_1(t)$

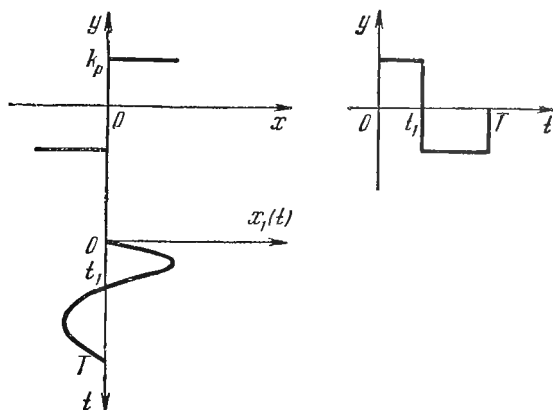


Рис. 42.

(рис. 42) и $x_2(t)$ (рис. 43), то, полагая, например, $k_p = k_1$, $-k_p = k_2$, видим, что тип сигнала $y_1(t)$ будет $(1, 2)$, а тип выходного сигнала $y_2(t)$ — $(1, 2, 1, 2)$.

Представим теперь выходной периодический сигнал дискретного элемента (2) в более удобном виде. Для этого введем рассмотрение периодические ступенчатые

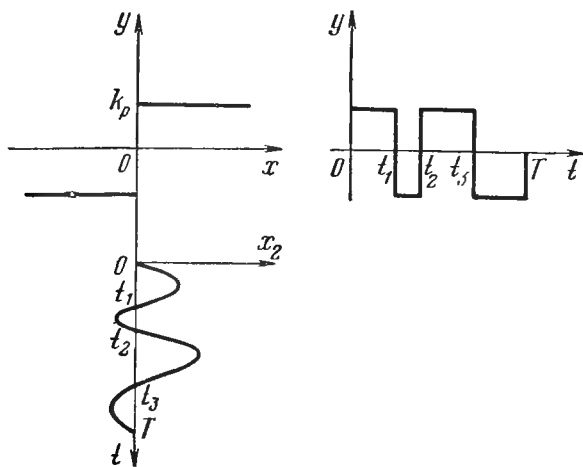


Рис. 43.

функции $l_s(t, T)$, обладающие следующими свойствами:

$$l_s(t, T) = \begin{cases} 0, & t_0 < t < t_{s-1}, \\ 1, & t_{s-1} < t < t_s, \end{cases} \quad t_s < t < t_m = t_0 + T. \quad (2.3)$$

Тогда очевидно, что периодический сигнал $U_d[x(t)]$ (2) можно представить в виде

$$U_d[x(t)] = \sum_{s=1}^m k_s l_s(t, T), \quad (2.4)$$

где m — число переключений за период, причем $t_m = t_0 + T$. При заданной дискретной нелинейности вид представления (4) определяется исключительно формой входного сигнала $x(t)$.

Теперь перейдем непосредственно к задаче определения периодических колебаний одноконтурной системы, изображенной на рис. 40, предполагая, что на вход линейной части действует внешнее периодическое возмущение $x_n(t) = x_n(t + T)$.

В этом случае имеет место система уравнений (1.22):

$$\left. \begin{aligned} y &= W(p, t) z, & z &= U_{\pi}[y(t)] + x_{\pi}, \\ W(p, t) &= W(p, t + T), & U_{\pi}[y(t)]_{(t+T)} &= U_{\pi}[y(t + T)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Предположим, что уравнения (5) имеют периодическое решение периода T :

$$y = y_{\pi}(t) = y_{\pi}(t + T), \quad z = z_{\pi}(t) = z_{\pi}(t + T). \quad (2.6)$$

Если предположить, что тип функции $U_{\pi}[y(t)]$ известен, то мы имеем представление (4), где числа k_s либо заданы, либо известным образом зависят от входного сигнала $y(t)$. При этом с учетом (4) имеем

$$z(t) = \sum_{s=1}^m k_s l_s(t, T) + x_{\pi}(t), \quad (2.7)$$

куда входят в качестве параметров неизвестные моменты переключения. Но тогда, используя основное соотношение (I.7.41), можно найти функцию $y_{\pi}(t)$, как установившуюся реакцию линейной части системы на периодическое возмущение (7):

$$y_{\pi}(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(T, t, t - \tau) z(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где

$$\varphi(T, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)} \quad (2.9)$$

— ИЧХ линейной части системы. При этом предполагается, что ни одна из величин $ki\omega$ не является полюсом передаточной функции линейной части системы, т. е. имеет место нерезонансный случай. Методика решения задачи в резонансных случаях будет рассмотрена ниже. Подставляя в (8) выражение (7), находим

$$y_{\pi}(t) = \sum_{s=1}^m k_s r_s(t, T) + y_{\pi}(t), \quad (2.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_s(t, T) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(T, t, t-\tau) l_s(\tau, T) d\tau = \\ &= \int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi(T, t, t-\tau) d\tau, \\ y_H(t) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(T, t, t-\tau) x_H(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T \varphi(T, t, t-\tau) x_H(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Очевидно, что функции $r_s(t, T)$, $y_H(t)$ представляют собой реакции линейной части системы соответственно на возмущения $l_s(t, T)$ и $x_H(t)$. Фактически функции $r_s(t, T)$ зависят также от параметров t_{s-1} и t_s . Таким образом, все периодические режимы заданного типа определяются (если они существуют) формулой (10), куда неявно входят также неизвестные моменты переключения.

Используя (11) и (9), нетрудно получить, интегрируя по τ , представление функций $r_s(t, T)$ в виде ряда:

$$\begin{aligned} r_s(t, T) &= \frac{1}{T} W(0, t) (t_s - t_{s-1}) \times \\ &\times \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{W(ki\omega, t)}{ki\omega} e^{ki\omega t} (e^{-ki\omega t_s} - e^{-ki\omega t_{s-1}}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

т. е. если ввести в рассмотрение функцию

$$\eta_T(t, \tau) = \frac{1}{T} W(0, t) \tau - \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{W(ki\omega, t)}{ki\omega} e^{ki\omega(t-\tau)}, \quad (2.13)$$

то из (12) будем иметь

$$r_s(t, T) = \eta_T(t, t_s) - \eta_T(t, t_{s-1}). \quad (2.14)$$

Во многих практических задачах функцию $\eta_T(t, \tau)$ можно записать в конечном виде. Это легко сделать в

случае (II.2.23). Задачей дальнейшего исследования является определение моментов переключения t_s и (если это необходимо) чисел k_s , соответствующих периодическому режиму.

Прежде всего, найденное решение должно удовлетворять условиям переключения. Предполагая, что условия переключения в (14) заданы некоторыми неявными уравнениями

$$g_s[y(t_s), t_s] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (2.15)$$

и подставляя (10), найдем

$$g_s \left[\sum_{\alpha=1}^m k_{\alpha} r_{\alpha}(t_s, T) + y_n(t_s), t_s \right] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (2.16)$$

Если числа k_s известны, то соотношения (16) представляют собой нелинейную систему уравнений, число неизвестных в которой равно числу неизвестных моментов переключения $t_0, t_1, \dots, t_{m-1}$ в неавтономном случае, когда известно T , и $t_1, \dots, T$ в автоколебательном случае, когда можно положить $t_0 = 0$. Если же числа k_s заранее неизвестны, то к уравнениям (16) следует добавить уравнения

$$k_s = k_s[y(t)], \quad (2.17)$$

связывающие величины чисел k_s со свойствами входного сигнала. Систему уравнений (16) и (17) будем называть *уравнениями периодов*. В том случае, когда числа k_s известны заранее, уравнениями периодов будем называть уравнения (16). Число неизвестных в уравнениях периодов по построению равно числу уравнений.

При этом, вообще говоря, не каждому решению уравнений периодов соответствует периодическое решение уравнений [5]. Полученные в результате системы чисел t_s, k_s и соответствующие им решения (10) должны удовлетворять ряду дополнительных условий, связанных с проверкой выполнения исходных предпосылок, неявно заложенных в процессе решения задачи. Прежде всего, очевидно, должно быть

$$t_i < t_j, \quad i < j. \quad (2.18)$$

Кроме того, должны выполняться так называемые *условия нормальности переключения* и *условия отсутствия дополнительных переключений*, кроме предусмотренных формулой (7). Общие соображения этого рода имеются в книге [102]. Более подробное рассмотрение этих условий мы проведем ниже при решении конкретных задач.

Изложенный прием построения уравнений периодов применим и тогда, когда внешнее возмущение в системе на рис. 40 приложено ко входу нелинейного элемента. В этом случае вместо уравнений (5) имеем

$$y = W(p, t)z, \quad z = U_n[v(t)], \quad v = y + x. \quad (2.19)$$

В этом случае следует задаться типом сигнала $z(t)$. При этом будем иметь, аналогично (10),

$$v(t) = \sum_{\alpha=1}^m k_{\alpha} r_{\alpha}(t, T) + x(t), \quad (2.20)$$

а уравнения периодов, получающиеся из (15), запишутся в виде

$$g_s \left[\sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha} r_{\alpha}(t_s, T) + x(t_s), t_s \right] = 0. \quad (2.21)$$

Таким образом, при фиксированном типе искомого периодического режима определение его параметров не представляет принципиальных затруднений, хотя практически с вычислительной точки зрения определение такого решения может оказаться весьма громоздким.

При этом при решении конкретных задач всегда возникает проблема получения информации о возможных типах периодических решений рассматриваемой системы. К сожалению, каких-либо достаточных общих рекомендаций на этот счет пока не имеется [55]. Поэтому на практике обычно ограничиваются построением и изучением периодических режимов простейших типов, которые в физических системах наблюдаются чаще всего.

Изложенный подход применим и к более сложным системам. Покажем это на примере системы (1.24), предполагая, что к входам линейных элементов

приложены дополнительно внешние периодические возмущения. В этом случае вместо (1.24) имеем

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p, t)(u + x_{2n}), & u &= f(t, v, \dots, v^{(p)}), \\ v &= W_1(p, t)(z + x_{1n}), & z &= U_n[y(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

В этом случае, предполагая тип периодического решения $z(t)$ заданным, имеем по формуле (10)

$$v(t) = \sum_{s=1}^m k_s r_{1s}(t, T) + v_n(t), \quad (2.23)$$

где функции r_{1s} и v_n получаются по формулам (11), где вместо φ следует подставить СИЧХ, соответствующую передаточной функции $W_s(p, t)$. Далее, имеем

$$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi_2(T, t, t-\tau) [f(\tau, v(\tau), \dots, v^{(p)}(\tau) + x_{2n}(\tau)) d\tau, \quad (2.24)$$

где подразумевается, что вместо $v(\tau), \dots, v^{(p)}(\tau)$ подставлена функция (23) и ее производные.

Далее, подставляя (24) в условия переключения и присоединяя, если нужно, условия (17), мы снова придем к уравнениям периодов.

В ряде важных практических задач обосновано предположение о существовании симметричных колебаний, меняющих знак через половину периода. В этом случае общий подход остается прежним, однако основные формулы (4) и (10) при этом существенно упрощаются, так как число неизвестных моментов переключения уменьшается вдвое. Рассмотрим вкратце эти упрощения на примере простейшей одноконтурной системы (5). Предположим, что входной сигнал дискретного элемента симметричен,

$$u_n(t) = U_n[y(t)] = -u_n(t+T). \quad (2.25)$$

В этом случае число переключений за период — четное, т. е. $m = 2q$, и вместо ступенчатых функций (3) удобно ввести функции

$$m_s(t, T) = \begin{cases} 0, & t_0 < t < t_{s-1}, & t_s < t < t_q = t_0 + T, \\ 1, & t_{s-1} < t < t_s, & s = 1, 2, \dots, q, \end{cases} \quad (2.26)$$

$$m_s(t) = -m_s(t+T).$$

При этом вместо (7) будем иметь

$$z_{\pi}(t) = \sum_{s=1}^q k_s m_s(t, T) + x_{\pi}(t), \quad (2.27)$$

где q — число переключений за половину периода.

Далее будем предполагать, что период исследуемых симметричных колебаний вдвое больше периода изменения параметров линейной части системы (5). При этом естественно считать и входной сигнал симметричным. В этом случае вместо (5) имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} W(p, t) &= W(p, t + T), \\ x_{\pi}(t) &= -x_{\pi}(t + T), \\ y_{\pi}(t) &= -y_{\pi}(t + T), \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

а также равенство (25). При этом имеем также из (27)

$$z_{\pi}(t) = -z_{\pi}(t + T). \quad (2.29)$$

Если считать тип решения $y_{\pi}(t)$ известным, то выражение (27) однозначно определится и будет зависеть от неизвестных моментов переключения. Тогда, используя общие соотношения (II.6.10), (II.6.11), получим аналогично (8), что

$$y_{\pi}(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \psi(2T, t, t - \tau) z_{\pi}(\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

где

$$\psi(2T, t, t - \tau) =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega_1, t] e^{(2k+1)i\omega_1(t-\tau)}, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{2}. \quad (2.31)$$

Подставляя в (30) выражение для $z_{\pi}(t)$ (27), получим

$$y_{\pi}(t) = \sum_{s=1}^q k_s p_s(t, T) + y_{\pi}(t), \quad (2.32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_s(t, T) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \psi(2T, t, t-\tau) m_s(\tau, T) d\tau = \\ &= \int_{t_{s-1}}^{t_s} \psi(2T, t, t-\tau) d\tau, \\ y_n(t) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \psi(2T, t, t-\tau) x_n(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T \psi(2T, t, t-\tau) x_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Если подставить в (33) выражение для ψ из (31), то после интегрирования получим

$$p_s(t, T) = \tilde{\eta}_T(t, t_s) - \tilde{\eta}_T(t, t_{s-1}), \quad (2.34)$$

где

$$\tilde{\eta}_T(t, \tau) = -\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W[(2k+1)i\omega_1, t]}{(2k+1)i\omega_1} e^{ki\omega_1(t-\tau)}. \quad (2.35)$$

В тех случаях, когда известно замкнутое выражение $\psi(2T, t, \tau)$, нетрудно получить и замкнутое выражение функции $\tilde{\eta}_T(t, \tau)$.

Аналогичным путем рассматриваются симметричные колебания в системах с многими нелинейностями.

В практических задачах также встречаются случаи, когда в отдельных частях контура колебания симметричны, а в других — нет. В тех случаях переменные, изменяющиеся во времени симметрично, связываются между собой соотношениями вида (30), а остальные переменные — соотношениями вида (8). Пример такой ситуации приведен в § 8, где рассматриваются автоколебания релейных экстремальных систем.

Отметим также, что все сказанное выше предполагало, что линейные элементы системы являются нерезонансными, т. е. для них существуют соответствующие импульсно-частотные характеристики, входящие в формулы (8) и (30). Если хотя бы один из элементов яв-

ляется резонансным, то изложенная методика должна быть несколько видоизменена.

Предположим, например, что в цепи имеется резонансный стационарный элемент с уравнением

$$y_k = W_p(p) z_k, \quad y_k = y_k(t + T), \quad z_k = z_k(t + T), \quad (2.36)$$

причем передаточная функция $W_p(p)$ имеет полюсы вида $k_s i\omega$, где целые числа k_s образуют множество K_p , ω — частота периодического режима. Тогда вместо формулы (8) следует пользоваться соотношениями (II. 3.87):

$$y_k(t) = \sum_{k \in K_p} c_s e^{k_s i\omega t} + \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi_B(T_1 t - \tau) z_k(\tau) d\tau, \quad (2.37)$$

где c_s — постоянные,

$$\varphi_B(T, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq k_s}}^{\infty} W_p(ki\omega) e^{ki\omega(t-\tau)}. \quad (2.38)$$

Кроме того, должны выполняться соотношения (II. 3.83):

$$\int_0^T z_k(\tau) e^{-k_s i\omega \tau} d\tau = 0, \quad k_s \in K_p. \quad (2.39)$$

Постоянные c_k в (37) являются неизвестными. Однако, включая в уравнения периодов наряду с соотношениями вида (37) условия отсутствия резонанса (39), мы в конце концов всегда сможем прийти к уравнениям периодов, где кроме неизвестных моментов переключения будут фигурировать неизвестные постоянные c_k . Подробности вычислений такого рода будут ниже продемонстрированы на примере.

§ 3. Устойчивость периодических колебаний релейных и импульсных систем

Перейдем теперь к исследованию вопроса об устойчивости найденных периодических режимов движения. В основе излагаемого ниже подхода к исследованию устойчивости лежит идея, развитая в работе [102].

Сущность этой идеи заключается в составлении уравнений в вариациях относительно периодического режима, аналогичных классическим, но использующих для учета разрывности релейного элемента аппарат обобщенных функций.

Такой подход используется и в настоящем параграфе. Однако, в отличие от работы [102], здесь применяется аппарат дифференцирования обобщенных функций по параметру (см. § 4 гл. I). Это позволяет рассмотреть более широкий круг задач, изучаемых в настоящей книге, на которые соотношения работы [102] непосредственно не распространяются.

Пусть сначала имеем одноконтурную систему, описываемую уравнениями

$$y = W(p, t) z, \quad z = f(y) + x(t), \quad (3.1)$$

где $f(y)$ — аналитическая функция своего аргумента,

$$W(p, t) = W(p, t + T), \quad x(t) = x(t + T) = x_{\pi}(t). \quad (3.2)$$

Пусть $z_{\pi}(t)$, $y_{\pi}(t)$ — периодическое решение уравнений (1), причем z_{π} и y_{π} — обыкновенные функции, так что тождественно

$$y_{\pi}(t) = W(p, t) z_{\pi}(t), \quad z_{\pi}(t) = f[y_{\pi}(t)] + x_{\pi}(t). \quad (3.3)$$

Классический метод построения уравнений в вариациях заключается в следующем. Полагаем

$$y(t) = y_{\pi}(t) + y_1(t), \quad z(t) = z_{\pi}(t) + z_1(t), \quad (3.4)$$

где y_1 , z_1 малы. Тогда из первого уравнения (1), с учетом первого равенства (3),

$$y_1 = W(p, t) z_1. \quad (3.5)$$

Из второго уравнения (1) получаем

$$z_1 = f(y_{\pi} + y_1) - z_{\pi} + x_{\pi}(t). \quad (3.6)$$

В силу аналитичности $f(y)$ имеем

$$f(y_{\pi} + y_1) = f(y_{\pi}) + \frac{df}{dy}(y_{\pi}) y_1 + \dots, \quad (3.7)$$

где точками обозначены слагаемые высшего порядка малости относительно y_1 . Подставляя (7) в (6) и учитывая второе равенство (3), получим после отбрасыва-

ния слагаемых высшего порядка малости уравнения в вариациях, имеющие вид

$$y_1 = W(p, t) z_1, \quad z_1 = \frac{df}{dy} [y = y_n(t)] y_1. \quad (3.8)$$

К уравнениям (8) можно прийти и несколько иным путем. Для этого вместо (4) применим замену переменных вида

$$y(t) = y_n(t) + \alpha u(t, \alpha), \quad z(t) = z_n(t) + \alpha v(t, \alpha), \quad (3.9)$$

где α — малый скалярный параметр.

В новых переменных уравнения (1) принимают вид

$$u = W(p, t) v, \quad v = \frac{1}{\alpha} [f(y_n + \alpha u) + x_n(t) - z_n(t)]. \quad (3.10)$$

Решения уравнений (10) зависят кроме аргумента t и от параметра α . Положим теперь

$$u(t, \alpha) = u(t, 0) + \tilde{u}(t, \alpha), \quad v(t, \alpha) = v(t, 0) + \tilde{v}(t, \alpha), \quad (3.11)$$

где

$$\tilde{u}(t, 0) = 0, \quad \tilde{v}(t, 0) = 0,$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} f[y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)] &= \\ &= f[y_n(t)] + \left\{ \frac{\partial f[y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0} \alpha + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда, подставляя (11) и (12) в (10), с учетом (3) находим при $\alpha \rightarrow 0$

$$y_1 = W(p, t) z_1, \quad z_1 = \frac{\partial f}{\partial \alpha} [y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)]_{\alpha=0}, \quad (3.13)$$

где обозначено:

$$y_1(t) = u(t, 0), \quad z_1 = v(t, 0). \quad (3.14)$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} [y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)]_{\alpha=0} &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} [y = y_n(t)] u(t, 0) = \frac{\partial f}{\partial y} (y_n) y_1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

то непосредственно легко убедиться, что уравнения (13) фактически совпадают с уравнениями в вариациях (8).

Уравнения в вариациях в форме (13) весьма удобны для обобщения на тот случай, когда функция $f(y)$ в уравнениях (1) — разрывная, в частности, если $f(y)$ соответствует дискретному нелинейному оператору в смысле § 1 этой главы.

В этом случае по-прежнему имеют смысл замена переменной (9) и уравнения (10). Рассматривая теперь в уравнениях (10) решения u и v как обобщенные функции, будем считать справедливыми соотношения (11). Кроме того, предположим, что исходная система такова, что выражение

$$f[y_{\Pi}(t) + \alpha u(t, \alpha)]$$

может рассматриваться как обобщенная функция, зависящая от параметра α (см. § 4 гл. I). Тогда

$$\begin{aligned} f[y_{\Pi}(t) + \alpha u(t, \alpha)] &= \\ &= f(y_{\Pi}) + \frac{D}{\partial \alpha} f[y_{\Pi}(t) + \alpha u(t, \alpha)]_{\alpha=0} \alpha + \dots, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где оператор $\frac{D}{\partial \alpha}$ означает обобщенную производную по параметру в смысле § 4 гл. I. Тогда таким же путем, как и в непрерывном случае, нетрудно получить уравнения в вариациях

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p, t) z_1, \\ z_1 &= \frac{D}{\partial \alpha} f[y_{\Pi}(t) + \alpha u(t, \alpha)]_{\alpha=0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где, в отличие от (13), используется оператор обобщенного дифференцирования $\frac{D}{\partial \alpha}$. Условия, при которых уравнения в вариациях (17) имеют смысл, обычно легко проверяются в каждом конкретном случае.

Изложенный подход к составлению уравнений в вариациях применим к нелинейным разрывным системам, имеющим произвольную структуру. При этом важно подчеркнуть, что возможно поэлементное варьирование каждого участка цепи. В результате варьирования относительно периодического режима мы приходим к не-

которой нелинейной периодической системе, в которой линейные элементы с уравнениями

$$y_i = W_i(p, t) z_i \quad (3.18)$$

сохраняются и в новых переменных имеют вид

$$y_{1i} = W_i(p, t) z_{1i}, \quad (3.19)$$

а каждый нелинейный элемент

$$z_i = f_i(y_i) \quad (3.20)$$

превращается в линейный, описываемый уравнением

$$z_{1i} = \frac{D}{\partial \alpha} f_i[y_{in}(t) + \alpha u_i(t, \alpha)]_{\alpha=0}, \quad (3.21)$$

где $y_{in}(t)$ — невозмущенный периодический сигнал на входе элемента (20). Всё сказанное дословно переносится на многомерный случай, когда элемент системы имеют несколько входов и выходов.

При исследовании устойчивости периодических режимов релейных и импульсных систем основную трудность составляет варьирование дискретных элементов. К изложению этого вопроса и перейдем.

Пусть

$$z = U_d(y), \quad (3.22)$$

где U_d — некоторый дискретный оператор в смысле § 1 этой главы.

В дальнейшем, где это не оговорено особо, предполагается, что входной сигнал $y(t)$ в (22) — обыкновенная непрерывная функция, хотя, может быть, имеющая и разрывную, но конечную производную. В практических задачах это условие, как правило, выполняется. Пусть $y_n(t)$, $z_n(t)$ — невозмущенное периодическое решение вида

$$y_n(t) = y_n(t + T), \quad z_n(t) = z_n(t + T), \quad (3.23)$$

так что

$$z_n(t) = U_d[y_n(t)]. \quad (3.24)$$

В силу определения дискретного оператора (см. § 1) в данном случае

$$z_n(t) = k_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, 2 \dots m, \quad t_m = t_0 + T, \quad (3.25)$$

где числа k_i и моменты переключения t_i — некоторые функционалы от входного сигнала:

$$k_i = k_i[y(t)], \quad t_i = t_i[y(t)]. \quad (3.26)$$

Из (25) следует, что все множество моментов переключений выходного сигнала $y(t)$ в периодическом режиме состоит из моментов

$$t_{is} = t_i + sT, \quad -\infty < s < \infty, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.27)$$

Для составления варьированного уравнения дискретного элемента в соответствии с (21) необходимо вычислить производную

$$z_1 = \frac{D}{\partial \alpha} U_d[y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)]_{\alpha=0}. \quad (3.28)$$

В силу сделанных предположений выражение $U_d[y_n + \alpha u(t, \alpha)]$ представляет собой разрывную (непериодическую) функцию t и α , причем в соответствии с (1.4)

$$U_d[y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)] = k_n[y_n(t) + \alpha u(t, \alpha)] \quad (3.29)$$

при $t_{n-1}(\alpha) < t < t_n(\alpha)$.

Далее для конкретности будем предполагать, что условия переключения имеют вид (2.15); тогда моменты переключения $t_n(\alpha)$ в (29) определяются соотношениями

$$g_n[y_n(t_n) + \alpha u(t_n, \alpha), t_n] = 0. \quad (3.30)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ моменты переключения $t_n(\alpha)$ переходят в моменты переключения t_{is} (27), соответствующие невозмущенному периодическому режиму. Поэтому при малых α целесообразно моменты переключения, получающиеся из (30), обозначать через $t_{is}(\alpha)$, так что

$$t_{is}(0) = t_{is} = t_i + sT. \quad (3.31)$$

Используя сказанное, перейдем к вычислению обобщенной производной (28). Для этого продифференцируем обобщенно по α разрывную функцию (29).

Применяя основную формулу сдвоенного дифференцирования по параметру (1.4.32), имеем

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\alpha} U_d[y_n(t) + au(t, \alpha)] = \\ = \frac{\partial}{\partial \alpha} U_d[y_n(t) + au(t, \alpha)] - \sum_n \delta[t - t_n(\alpha)] \Delta U_{dn} \frac{dt_n(\alpha)}{d\alpha}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где ΔU_{dn} — разрыв U_d в момент $t_n(\alpha)$.

Используя (29) и новые обозначения для моментов переключения (31), соотношение (32) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\alpha} U_d[y_n(t) + au(t, \alpha)] = \\ = l(t, \alpha) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta[t - t_{is}(\alpha)] \Delta U_{dis} \frac{dt_{is}(\alpha)}{d\alpha}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где по прежнему ΔU_{dis} — разрыв U_d в момент $t_{is}(\alpha)$, а обыкновенная функция $l(t, \alpha)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} l(t, \alpha) = l_n = \frac{\partial k_n[y_n(t) + au(t, \alpha)]}{\partial \alpha}, \\ t_{n-1}(\alpha) < t < t_n(\alpha). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Теперь для того, чтобы найти производную (28), необходимо перейти в (33) и (34) к пределу при $\alpha \rightarrow 0$. При этом в силу периодичности невозмущенного движения соответственно

$$\delta[t - t_{is}(\alpha)]_{\alpha=0} = \delta[t - t_{is}(0)] = \delta(t - t_i - sT), \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Delta U_{dis}(\alpha=0) = \Delta U_{di}(\alpha=0) = \\ = z_n(t_i + 0) - z_n(t_i - 0) = \Delta z_{ni}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Из (34) при $\alpha \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} l(t, \alpha)_{\alpha=0} = l(y_1) = l_i(y_1) = \\ = \left\{ \frac{\partial k_i[y_n(t) + au(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \end{aligned} \quad (3.37)$$

т. е.

$$l(y_1) = l_i(y_1) \text{ при } t_{i-1} + sT < t < t_i + sT, \quad -\infty < s < \infty; \quad (3.38)$$

при этом фактически функция $l(y_1)$ определяет некоторый линейный периодический оператор по отношению к входному сигналу y_1 . С учетом (35)—(38) и (33) получается

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{D}{\partial \alpha} U_{\Delta} [y_{\Pi}(t) + \alpha u(t, \alpha)]_{(\alpha=0)} = \\ &= l(y_1) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \delta(t - t_{is}) \Delta z_{\Pi i} \frac{dt_{is}}{\partial \alpha} (\alpha=0). \end{aligned} \quad (3.39)$$

В практических задачах общая формула (39) может упрощаться. Например, если система такова, что последовательность чисел k_i не меняется за период при малых вариациях входного сигнала, то $l_i = 0$ и из (40) имеем

$$z_1 = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \delta(t - t_{is}) \Delta z_{\Pi i} \frac{dt_{is}}{\partial \alpha} (\alpha=0). \quad (3.40)$$

Если же система импульсная, то моменты переключения t_i от параметра α не зависят и $z_1 = l(y_1)$.

Для практического использования полученных формул необходимо еще вычислить производные от момента переключения. В принципе это всегда можно сделать, используя условия переключения (1.2), которые определяют $t_i(\alpha)$ как неявную функцию параметра α . Поэтому производную $\frac{dt_i}{d\alpha}$ можно обычно вычислить по правилам дифференцирования неявных функций. При этом, естественно, предполагается, что соответствующие производные существуют.

Пусть, например, моменты переключения $t_n(\alpha)$ определяются условиями переключения (30), где $g_n(y, t)$ — гладкая функция своих аргументов, и функция $y(t)$ имеет при $t = t_n$ непрерывную производную $\frac{dy}{dt}(t_n)$. Тогда, дифференцируя (30) по α и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получаем с учетом (31)

$$\begin{aligned} \frac{dt_n}{d\alpha} (\alpha=0) &= \\ &= - \frac{\frac{\partial g_n}{\partial y}(t_n) u(t_n, 0)}{\frac{\partial g_n}{\partial y}(t_n) \frac{dy_{\Pi}}{dt}(t_n) + \frac{\partial g_n}{\partial t}(t_n)} = - \frac{\frac{\partial g_n}{\partial y}(t_n)}{\frac{dg_n}{dt}(t_n)} y_1(t_n), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$\frac{\partial g_n}{\partial y}(t_n) = \frac{\partial g_n}{\partial y}[y_n(t_n), t_n], \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial t}(t_n) = \frac{\partial g_n}{\partial t}[y_n(t_n), t_n], \quad (3.43)$$

т. е. все производные вычислены в момент t_n на невозмущенном периодическом режиме в предположении, что

$$\frac{dg_n}{dt}(t_n) \neq 0. \quad (3.44)$$

Соотношение (44) называется *условием нормальности переключения*. Периодические режимы, для которых в каждый момент переключения выполнены условия нормальности (44), называются *нормальными*. Ниже везде, не оговаривая этого особо, будем рассматривать только нормальные периодические режимы. Подставляя (41) в (39), получим окончательное выражение:

$$z_1 = l(y_1) + \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i \delta_T(t - t_i) y_1(t), \quad (3.45)$$

где

$$\xi_i = \frac{\frac{\partial g_i}{\partial y}(t_i)}{\frac{dg_i}{dt}(t_i)} \Delta z_{ul}, \quad \delta_T(t - t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i - kT). \quad (3.46)$$

Формулы (45), (46) выведены в предположении, что в моменты переключения производная $\frac{dy}{dt}$ непрерывна.

Во многих практических задачах, однако, входной сигнал дискретного элемента имеет в момент переключения разрыв производной. Поясним технику вычислений для этого случая на примере условий переключения (30).

Пусть в окрестности момента переключения $t_n(\alpha)$ имеем в системе (1), (22)

$$y(t) = y^-(t), \quad t < t_n(\alpha); \quad y(t) = y^+(t), \quad t > t_n(\alpha), \quad (3.47)$$

причем в момент переключения t_n

$$y^+(t_n, \alpha) = y^-(t_n, \alpha). \quad (3.48)$$

Тогда для определения момента переключения имеем два эквивалентных уравнения, получающихся из (30):

$$\left. \begin{aligned} g_n[t_n, y_n^+(t_n) + \alpha u^+(t_n, \alpha)] &= 0, \\ g_n[t_n, y_n^-(t_n) + \alpha u^-(t_n, \alpha)] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Находя из каждого из этих уравнений производную $\frac{dt_i}{d\alpha}$, так же, как при выводе формулы (43), получим

$$\frac{dt_n}{d\alpha} = \xi_n^- y_{1n}^- = \xi_n^+ y_{1n}^+, \quad (3.50)$$

где

$$\xi_n^\pm = -\frac{\frac{\partial g_n}{\partial y}(t_n \pm 0)}{\frac{dg_n}{dt}(t_n \pm 0)}, \quad y_{1n}^\pm = y_1(t_n \pm 0), \quad (3.51)$$

$$\frac{dg_n}{dt}(t_n - 0) \neq 0, \quad \frac{dg_n}{dt}(t_n + 0) \neq 0. \quad (3.52)$$

Условия (52) далее называются, аналогично (44), *условиями нормальности переключения*. Ниже будут рассматриваться только нормальные периодические режимы, для которых условия (52) выполняются в каждый момент переключения. Впрочем, в ряде задач условием нормальности периодического режима можно считать выполнение только одного из неравенств (52).

В случае непрерывности производных $\frac{dy}{dt}(t_i)$ в моменты переключения формулы (50) сводятся к (41). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться формулами (50), как более общими, причем для определенности будем брать первую из них. Тогда из (45) получится

$$z_1 = l(y_1) + \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i^- \delta_T(t - t_i) y_1^-(t), \quad y_1^-(t) = y_1(t - 0), \quad (3.53)$$

где

$$\xi_i^- = \frac{\frac{\partial g_i}{\partial y}(t_i - 0)}{\frac{dg_i}{dt}(t_i - 0)} \Delta z_{nt}. \quad (3.54)$$

В частном случае, когда $l(y_1) = 0$, имеем

$$z_1 = \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i^- \delta_T(t - t_i) y_1^-(t), \quad (3.55)$$

что соответствует идеальному амплитудно-импульсному элементу, входной сигнал которого претерпевает разры-

вы в момент фиксации. Это обстоятельство не приводит к каким-либо недоразумениям, так как из (55) следует, что фиксируется «левое» значение входного сигнала.

Таким образом, поэлементно варьируя релейную или импульсную систему, можно прийти к некоторой линейной периодической системе. В большинстве практических задач эта система кроме исходных линейных элементов будет содержать амплитудно-импульсные элементы, появляющиеся при варьировании дискретных нелинейностей. По аналогии с классической терминологией эту систему естественно назвать *системой первого приближения* относительно исследуемого периодического режима.

В зависимости от факта устойчивости или неустойчивости этой системы первого приближения, во многих случаях можно сделать вывод об устойчивости или неустойчивости исследуемого периодического режима. В дальнейшем при рассмотрении периодических колебаний неавтономных систем будем считать исходный режим устойчивым, если система первого приближения устойчива в смысле определений гл. II или гл. IV и ее характеристические показатели лежат в левой полуплоскости. Для рассмотренных ниже примеров это можно доказать строго.

При изучении автоколебаний, однако, такой подход неприменим, так как в этом случае система первого приближения имеет в полосе $0 \leq \operatorname{Im} \lambda < \omega$ по крайней мере один характеристический показатель с вещественной частью, равной нулю. Доказательство этого факта можно выполнить, например, способом, примененным в [75] при исследовании более узкого класса систем.

Общая теория этого вопроса достаточно сложна.

Однако для многих практически важных классов систем достаточным условием устойчивости автоколебательного режима является расположение характеристических показателей уравнений первого приближения, за исключением одного, в левой половине полосы $0 \leq \operatorname{Im} \lambda < \omega$. Так будет, например, если изучаемая система кроме дискретных нелинейностей содержит линейные стационарные элементы с сосредоточенными параметрами и безынерционные линейные периодические

усилители. Этот результат справедлив также для многих систем с запаздыванием. Другие, более общие случаи могут быть рассмотрены на основе работ [2, 56].

§ 4. Периодические колебания одноконтурной релейной системы с нерезонансной линейной частью

В настоящем параграфе на основе изложенной теории исследуются нормальные периодические колебания в простейшей одноконтурной системе (рис. 40), содержащей кроме релейного элемента линейный периодический элемент. На основании результатов гл. II к такой системе может быть сведена произвольная система, содержащая кроме одного релейного элемента произвольное число линейных периодических элементов с соизмеримыми периодами. Уравнения рассматриваемой системы имеют вид

$$y = W(p, t)z, \quad z = U_d(y) + x(t), \quad (4.1)$$

где, как и ранее, предполагается, что

$$W(p, t) = W(p, t + T), \quad x(t) = x_{\pi}(t) = x_{\pi}(t + T) \quad (4.2)$$

и для конкретности принято, что внешнее возмущение приложено ко входу линейной части системы. Характеристику реле принимаем в виде, изображенном на рис. 36, а. Передаточная функция $W(p, t)$ и внешнее возбуждение $x_{\pi}(t)$ предполагаются такими, что решение $y(t)$ является непрерывной функцией от t , хотя, возможно, имеющей разрывы производной в моменты переключения реле. Для того чтобы это имело место, необходимо, чтобы линейная часть системы (1) обладала достаточно сильными фильтрующими свойствами.

В системе (1), являющейся неавтономной, могут возникать, вообще говоря, периодические колебания (как вынужденные, так и собственные) с произвольным периодом, соизмеримым с периодом T . Для простоты изложения ниже ограничимся рассмотрением только несимметричных периодических колебаний, имеющих период T , и симметричных колебаний периода $2T$. В этом последнем случае, кроме (2), будем полагать, что

$$x_{\pi}(t) = -x_{\pi}(t + T). \quad (4.3)$$

При разыскании периодического режима периода T необходимо предварительно задагся его типом, т. е. числом переключений реле за период.

Не ограничивая общности, можно взять за начальный один из моментов переключения реле с нижней полки на верхнюю. В этом случае имеем

$$U_d(y) = (-1)^{i-1} k_p, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.4)$$

где числа t_i неизвестны, k_p — постоянная. Применяя формулу (2.7), находим

$$z_n(t) = k_p \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} l_s(t, T) + x_n(t), \quad (4.5)$$

что с учетом (2.10) приводит к формуле

$$y_n(t) = k_p \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} r_s(t, T) + y_n(t). \quad (4.6)$$

Условия переключения в данном случае имеют вид

$$y(t_i) = (-1)^i \sigma_0, \quad (4.7)$$

что с учетом (6) приводит к уравнениям периодов

$$k_p \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} r_s(t_i, T) + y_n(t_i) = (-1)^i \sigma_0. \quad (4.8)$$

Система чисел t_i ($i = 0, \dots, m-1$), найденная путем решения уравнений периодов (8), действительно определяет нормальный периодический режим, если выполнены дополнительные условия, о которых говорилось в § 2, а также условия нормальности переключения (3.44) или (3.52).

В данном случае эти условия сводятся к следующим:

1. Должно быть

$$t_i < t_k \quad \text{при} \quad i < k. \quad (4.9)$$

2. Если найденные числа t_i , удовлетворяющие (9), подставить в (6), то получим вполне конкретную функцию $y_n(t)$. Для того чтобы эта функция действительно соответствовала типу предполагаемого периодического решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись

условия отсутствия дополнительных переключений, которые можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &> -\sigma_0, & t_{s-1} < t < t_s, & s = 1, 3, \dots; \\ y_{\Pi}(t) &< \sigma_0, & t_{s-1} < t < t_s, & s = 2, 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

3. Кроме того, должны выполняться условия правильного направления переключения [102], которые в данном случае имеют вид

$$(-1)^k \dot{y}(t_k) = (-1)^k \frac{dy}{dt}(t_k) > 0, \quad (4.11)$$

если производная $\frac{dy}{dt}(t)$ непрерывна, или

$$(-1)^k \dot{y}(t_k \pm 0) > 0, \quad (4.12)$$

если эта производная разрывна.

Сравнивая эти соотношения с (3.44) и (3.52), убеждаемся, что выполнение условий надлежащего направления переключения обеспечивает и выполнение условий нормальности переключения, так как в данном случае

$$g_i(y, t) = y \pm \sigma_0, \quad (4.13)$$

и, следовательно,

$$\frac{dg_i(t_i)}{dt} = \dot{y}(t_i). \quad (4.14)$$

Предположим теперь, что в уравнениях (1) вместо второго условия (2) выполняется соотношение (3), и будем искать симметричное периодическое решение периода $2T$:

$$y_{\Pi}(t) = -y_{\Pi}(t + T), \quad z_{\Pi}(t) = -z_{\Pi}(t + T). \quad (4.15)$$

В этом случае следует задать предполагаемый тип решения $U_{\Pi}(y_{\Pi})$ на интервале $0 < t < T$:

$$U_{\Pi}(y_{\Pi}) = (-1)^s k_p, \quad t_{s-1} < t < t_s, \quad s = 1, \dots, \frac{m}{2} = q. \quad (4.16)$$

Применяя (2.32), найдем

$$y_{\Pi}(t) = k_p \sum_{s=1}^q (-1)^s p_s(t, T) + y_{\Pi}(t). \quad (4.17)$$

Используя (7), получаем уравнения периодов для данного случая:

$$y_n(t_i) = k_p \sum_{s=1}^q (-1)^s p_s(t_i, T) + y_n(t_i) = (-1)^i \sigma_0. \quad (4.18)$$

При этом по-прежнему должны выполняться условия (9), (10) и (12).

Если исходная система автономна, т. е. $W(p, t) = W(p)$, и внешнее возбуждение отсутствует, то можно полагать $t_0 = 0$. При этом, однако, неизвестным будет период автоколебаний T . Для общего автоколебательного случая уравнения периодов получаются из (8) при $t_0 = 0$, $y_n(t) = 0$. Аналогичным путем из (18) можно получить уравнения периодов для симметричных автоколебаний.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденных периодических режимов. В соответствии с содержанием предыдущего параграфа уравнения в вариациях для случая несимметричных колебаний имеют вид

$$y_1 = W(p, t) z_1, \quad z_1 = \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i^- \delta_T(t - t_i) y_1^-(t). \quad (4.19)$$

При этом, учитывая условия переключения (7), которые являются частным случаем (2.15), имеем по (3.54)

$$\xi_i^- = \frac{2k_p}{\dot{y}_n(t_i - 0)} (-1)^i.$$

Если учесть условия правильного направления переключения (12), то получится

$$\xi_i^- = \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_i - 0)|}. \quad (4.20)$$

С учетом (20) уравнения в вариациях (19) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p, t) z_1, \\ z_1 &= 2k_p \sum_{i=0}^{m-1} \delta_T(t - t_i) \frac{y_1^-(t)}{|\dot{y}_n(t_i - 0)|}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Найдем характеристическое уравнение, соответствующее импульсной системе (21). Для этого положим (см. § 7 гл. IV)

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda t} y_{1n}(t), & z_1(t) &= e^{\lambda t} z_{1n}(t), \\ y_{1n}(t) &= y_{1n}(t+T), & z_{1n}(t) &= z_{1n}(t+T). \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Подставляя соотношения (22) в (21), получим, как и в гл. IV,

$$\left. \begin{aligned} y_{1n} &= W(p + \lambda, t) z_{1n}, \\ z_{1n} &= 2k_p \sum_{i=0}^{m-1} \delta_T(t - t_i) \frac{y_{1n}(t_i - 0)}{|\dot{y}_{1n}(t_i - 0)|}, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где, как и ранее,

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\omega t} \quad (4.24)$$

и учтено, что

$$y_{1n}(t_{is} - 0) = y_{1n}(t_i + sT - 0) = y_{1n}(t_i - 0). \quad (4.25)$$

Рассматривая $z_{1n}(t)$ как внешнее возбуждение, из первого уравнения (23) находим

$$y_{1n}(t) = 2k_p \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(T, \lambda, t, t - t_i) \frac{y_{1n}(t_i - 0)}{|\dot{y}_{1n}(t_i - 0)|}. \quad (4.26)$$

Подставляя сюда $t = t_k - 0$, $k = 0, \dots, m-1$, находим

$$\begin{aligned} y_{1n}(t_k - 0) &= \\ &= 2k_p \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(T, \lambda, t_k - 0, t_k - t_i - 0) \frac{y_{1n}(t_i - 0)}{|\dot{y}_{1n}(t_i - 0)|}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

откуда получаем характеристическое уравнение

$$\det \left| \delta_{ik} - \frac{2k_p}{|\dot{y}_{1n}(t_i - 0)|} \varphi(T, \lambda, t_k - 0, t_k - t_i - 0) \right| = 0, \quad (4.28)$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Величины $u_{ik} = \varphi(T, \lambda, t_k - 0, t_k - t_i - 0)$ вычисляются следующим образом. По (II.6.22) имеем

$$\varphi(T, \lambda, t, \tau) = e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kT} g(t, \tau + kT) = \tilde{\varphi}(T, \lambda, t, \tau),$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < \tau < T. \quad (4.29)$$

Поэтому

$$u_{ik} = \begin{cases} \tilde{\varphi}(T, \lambda, t_k - 0, t_k - t_i - 0), & k > i, \\ \tilde{\varphi}(T, \lambda, t_k - 0, t_k - t_i + T - 0), & k < i, \\ \hat{\varphi}(T, \lambda, t_k - 0, T), & k = i. \end{cases} \quad (4.30)$$

Для широкого круга задач, исчерпывающих многочисленные приложения, условием асимптотической устойчивости периодического режима в неавтономных системах является расположение корней уравнения (28) в левой полуплоскости. В автономном случае характеристическое уравнение (28) имеет вид

$$\det \left| \delta_{ik} - \frac{2k_p}{|y_n(t_i - 0)|} \varphi(T, \lambda, t_k - t_i - 0) \right| = 0, \quad t_0 = 0. \quad (4.31)$$

Определители, входящие в (28) и (31), периодичны по λ с периодом $i\omega$.

Из общих соображений, изложенных в предыдущем параграфе, следует, что если положить в (31) $z = e^{\lambda T}$, то это уравнение будет иметь по крайней мере один корень $z = e^{\lambda kT} = 1$.

В случае, отмеченных в § 3, автоколебательный режим будет устойчивым, если остальные корни λ_i уравнения (31) лежат в левой полуплоскости.

Аналогичным путем можно построить характеристическое уравнение для исследования устойчивости симметричного периодического режима (15), имеющего период $2T$. Это уравнение имеет вид

$$\det \left| \delta_{ik} - \frac{2k_p}{|y_n(t_i - 0)|} \varphi(T, \lambda, t_k - 0, t_k - t_i - 0) \right| = 0 \quad (4.32)$$

$$(i, k = 0, 1, \dots, q - 1).$$

для неавтономной системы и

$$\det \left| \delta_{ik} - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_i - 0)|} \varphi(T, \lambda, t_k - t_i - 0) \right| = 0 \quad (4.33)$$

$$(i, k = 0, 1, \dots, q-1)$$

для автоколебательного случая.

Пример 4.1. Рассмотрим задачу о параметрическом возбуждении колебаний в системе, описываемой уравнениями

$$y = W_2(p) u, \quad u = (\sin \omega t) v, \quad v = W_1(p) z, \quad z = \text{sign } y. \quad (4.34)$$

Будем искать простейший симметричный периодический режим системы (34) такой, что

$$z_n(t) = \begin{cases} 1, & t_0 < t < t_0 + T, \\ -1, & t_0 + T < t < t_0 + 2T, \end{cases} \quad z_n(t) = z_n(t + 2T), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.35)$$

Если в уравнениях (34) ввести новое начало отсчета времени и записать их в виде

$$y = W_2(p) u, \quad u = \sin \omega (t - t_0) v, \quad v = W_1(p) z, \quad z = \text{sign } y, \quad (4.36)$$

то вместо (35) будем иметь

$$z_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ -1, & T < t < 2T. \end{cases} \quad (4.37)$$

Если (37) имеет место, то из (36) следует

$$v_n(t) = \int_0^T \psi_1(2T, t - \tau) d\tau, \quad (4.38)$$

где

$$\psi_s(2T, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_s[(2k+1)i\omega_1] e^{(2k+1)i\omega_1 t},$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega}{2} \quad (s = 1, 2).$$

Выходная координата $y(t)$ в периодическом режиме определяется уравнением

$$y_n(t) = \int_0^T \psi_2(2T, t - q) \sin \omega(q - t_0) dq \int_0^T \psi_1(2T, q - \tau) d\tau. \quad (4.39)$$

Условие переключения в данном случае имеет вид

$$y_n(0) = 0.$$

С учетом (39) это уравнение приводится к виду

$$\operatorname{tg} \omega t_0 = \frac{\int_0^T \psi_2(2T - q) \sin \omega q dq \int_0^T \psi_1(2T, q - \tau) d\tau}{\int_0^T \psi_2(2T - q) \cos \omega q dq \int_0^T \psi_1(2T, q - \tau) d\tau}. \quad (4.40)$$

Это уравнение определяет искомую величину t_0 . Данному t_0 действительно будет соответствовать периодический режим, если выполнены условия

$$\dot{y}_n(\pm 0) > 0 \quad (4.41)$$

и, кроме того,

$$y_n(t) > 0, \quad 0 < t < T. \quad (4.42)$$

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденного периодического режима. Для этого отметим, что уравнения (36) можно свести к виду (1):

$$y = W(p, t) z, \quad z = \operatorname{sign} y, \quad (4.43)$$

где передаточная функция $W(p, t)$ в соответствии с (II. 6.33) и (II. 6.60), равна

$$W(p, t) = \frac{1}{2i} [W_2(p + i\omega) e^{i\omega(t-t_0)} - W_2(p - i\omega) e^{-i\omega(t-t_0)}] W_1(p). \quad (4.44)$$

СИЧХ $\varphi(T, \lambda, t, t - \tau)$ в данном случае, в соответствии с формулами § 6 гл. II, равна

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \int_0^T \varphi_2(T, \lambda, t - q) \sin \omega(q - t_0) \cdot \varphi_1(T, \lambda, q - \tau) dq. \end{aligned} \quad (4.45)$$

При этом, если предположить, что СИЧХ (45) непрерывна по t и τ , то характеристическое уравнение, получающееся из (32), будет иметь вид

$$1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(0)|} \varphi(T, \lambda, 0, 0) = 0. \quad (4.46)$$

Пусть передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — дробно-рациональные; тогда периодический режим будет асимптотически устойчивым, если корни уравнения (46) лежат в левой полуплоскости.

Пример 4.2. Проиллюстрируем изложенный подход на примере простейшей одноконтурной системы

$$y = W(p)z, \quad z = U_n(y), \quad (4.47)$$

где передаточная функция $W(p)$ имеет вид (II. 3.53), $U_n(y)$ — характеристика реле, изображенная на рис. 36, а. Будем рассматривать простейший симметричный автоколебательный режим, когда

$$z_n(t) = 1, \quad 0 < t < T, \quad z_n(t) = -z_n(t + T). \quad (4.48)$$

В этом случае по (2.32), (2.33)

$$y_n(t) = k_p \int_0^T \psi(2T, t - \tau) d\tau. \quad (4.49)$$

Если подставить сюда (II. 3.78), то получится

$$y_n(t) = -k_p \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} + 2k_p \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} \frac{e^{p_\rho t}}{1 + e^{p_\rho T}}, \quad 0 < t < T. \quad (4.50)$$

Если учесть условие переключения (7), то из (50) получим уравнение периодов

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} \frac{1 - e^{p_\rho T}}{1 + e^{p_\rho T}} = \frac{\sigma_0}{k_p}. \quad (4.51)$$

При исследовании устойчивости периодического режима следует отметить два случая: $m_1 = 0$ и $m_1 \neq 0$ (см. (II. 1.26)). Второй случай интересен тем, что здесь координата $y(t)$ имеет разрывную производную. Характеристическое уравнение (33) в данном случае имеет вид

$$1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(T, \lambda, -0) = 0, \quad (4.52)$$

что с учетом (II. 3.60) эквивалентно следующему:

$$1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}(-0)|} \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho}-\lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} = 0. \quad (4.53)$$

Если же $m_1 = 0$, то известно, что

$$\sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} = 0, \quad (4.54)$$

и, следовательно, уравнение (53) можно представить в другой форме:

$$1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_{\Pi}(-0)|} \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{1 - e^{(p_{\rho}-\lambda)T}} = 0. \quad (4.55)$$

Характеристическое уравнение в формах (53) и (55) было получено в [102], где задача рассматривалась в предположении, что $m_1 = 0$. Изложенное показывает, что запись (53) является более общей, так как она сохраняет свое значение и при $m_1 \neq 0$.

§ 5. Периодические колебания в одноконтурной релейной системе с резонансной линейной частью

Покажем на примере простейшей одноконтурной системы особенности исследования периодических колебаний в системах, содержащих стационарные резонансные элементы. Подход, излагаемый ниже, непосредственно распространяется и на более общие случаи.

Рассматривается система, имеющая уравнения

$$\left. \begin{aligned} y &= W(p)z, \quad z = U_{\pi}(y) + x(t), \\ x(t) &= x(t+T) = x_{\Pi}(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где передаточная функция $W(p)$ имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{p^s} W_1(p), \quad s > 0, \quad (5.2)$$

причем передаточная функция $W_1(p)$ не является резонансной и $\frac{1}{W_1(0)} \neq 0$; $U_{\pi}(y)$ — характеристика реле, изображенная на рис. 36, а; $x(t) = x_{\Pi}(t)$ — периодиче-

ское внешнее возбуждение. Будем рассматривать простейший периодический режим, когда

$$z = \begin{cases} k_p + x(t), & t_0 < t < t_1, \\ -k_p + x(t), & t_1 < t < t_0 + T, \end{cases} \quad 0 \leq t_0 < T, \quad (5.3)$$

где величины t_0 и t_1 подлежат определению.

Для того чтобы выходная координата линейной части $y(t)$ была периодической, необходимо, в силу (2.39), чтобы периодическая функция (3) не содержала постоянной составляющей, т. е. чтобы

$$\int_0^T z(\tau) d\tau = 0. \quad (5.4)$$

Подставляя (3) в (4), находим

$$k_p [2(t_1 - t_0) - T] + x_0 T = 0, \quad (5.5)$$

где

$$x_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

Из равенства (5) можно вывести ряд важных следствий. Для этого представим его в виде

$$k_p \left(1 - 2 \frac{t_1 - t_0}{T} \right) = x_0. \quad (5.7)$$

Из (7) следует, что если $x_0 = 0$, то $t_1 - t_0 = \frac{T}{2}$. Можно показать, что в этом случае в системе возможны, вообще говоря, только симметричные колебания, причем для этого необходимо, чтобы $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$.

В частном случае, когда в (1) $x(t) = x_0 = \text{const}$, система автономна, и полагая $t_0 = 0$, из (7) имеем

$$k_p \left(1 - \frac{2t_1}{T} \right) = x_0, \quad (5.8)$$

откуда следует, что при $x_0 = 0$ в системе (1) возможны только симметричные автоколебания простейшего типа. Далее везде предполагается, что $x_0 \neq 0$, так как в случае симметричных колебаний линейная часть с передаточной функцией (2) не является резонансной. Отметим

также, что соотношение (7) можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{x_0}{k_p} \right), \\ T - t_1 + t_0 &= \frac{T}{2} \left(1 + \frac{x_0}{k_p} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Но если периодический режим (3) существует, то должно быть

$$t_1 - t_0 > 0, \quad T - t_1 + t_0 > 0, \quad (5.10)$$

и из (9) получаем необходимое условие существования периодического режима простейшего типа:

$$|x_0| < k_p. \quad (5.11)$$

Предположим теперь, что условие (11) выполнено. Тогда в системе (1) могут установиться периодические колебания, определяемые в соответствии с (2.37) формулой

$$y_n(t) = c + \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi_B(T, t - \tau) z(\tau) d\tau, \quad (5.12)$$

где c — неизвестная постоянная,

$$\varphi_B(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} W(ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (5.13)$$

С учетом (3) из (12) получается

$$\begin{aligned} y_n(t) &= c + k_p \int_{t_0}^{t_1} \varphi_B(T, t - \tau) d\tau - \\ &- k_p \int_{t_1}^{t_0+T} \varphi_B(T, t - \tau) d\tau + \int_0^T \varphi_B(T, t - \tau) x_n(\tau) d\tau = \\ &= c + \tilde{y}(t, T, t_0, t_1). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из условий переключений (4.7) имеем

$$\left. \begin{aligned} y_n(t_0) &= c + \tilde{y}(t_0, T, t_0, t_1) = \sigma_0, \\ y_n(t_1) &= c + \tilde{y}(t_1, T, t_0, t_1) = -\sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Присоединяя к этим уравнениям соотношение (7), получим замкнутую систему из трех уравнений относительно неизвестных c , t_0 , t_1 .

Впрочем, неизвестную c легко исключить, в результате чего получается система из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}(t_0, T, t_0, t_1) - \tilde{y}(t_1, T, t_0, t_1) &= 2\sigma_0, \\ 1 - \frac{2(t_1 - t_0)}{T} &= \frac{x_0}{k_p}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Если же подставить в первое уравнение (16)

$$t_1 = t_0 + \frac{T}{2} - \frac{x_0 T}{2k_p},$$

то придем к одному уравнению относительно начального момента t_0 :

$$\begin{aligned} &\tilde{y}\left(t_0, T, t_0, t_0 + \frac{T}{2} - \frac{x_0 T}{2k_p}\right) - \\ &- \tilde{y}\left(t_0 + \frac{T}{2} - \frac{x_0 T}{2k_p}, T, t_0, t_0 + \frac{T}{2} - \frac{x_0 T}{2k_p}\right) = 2\sigma_0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В автоколебательном случае при $t_0 = 0$, $x(t) = x_0$ уравнение (17) принимает вид

$$\tilde{y}\left(0, T, 0, \frac{T}{2} - \frac{x_0 T}{2k_p}\right) - \tilde{y}\left(\frac{T}{2} - \frac{x_0 T}{2k_p}, T, 0, \frac{x_0 T}{2k_p}\right) = 2\sigma_0, \quad (5.18)$$

что является уравнением относительно неизвестного периода T . При этом, как и всегда, каждое решение уравнений периодов следует проверить с точки зрения выполнения условий правильности переключения и условий отсутствия дополнительных переключений.

Перейдем к исследованию устойчивости найденного периодического режима $y = y_{\pi}(t)$, $z = z_{\pi}(t)$. Для этого составим сначала соответствующие уравнения в вариациях. При этом следует отметить, что наличие резонансных элементов в принципе не вносит никаких изменений в методику составления уравнения в вариациях. В данном случае при выполнении требований предыдущего па-

параграфа уравнения в вариациях, в соответствии с (4.21) и (3), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p) z_1, \\ z_1 &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0-0)|} \delta_T(t-t_0) y_1(t-0) + \\ &+ \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \delta_T(t-t_1) y_1(t-0). \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Полагая, как и ранее,

$$y_1(t) = e^{\lambda t} y_{1n}(t), \quad z_1(t) = e^{\lambda t} z_{1n}(t),$$

где функции, отмеченные индексом «п», имеют по t период T , получим

$$\begin{aligned} y_{1n} &= W(p + \lambda) z_{1n}, \\ z_{1n} &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0-0)|} \delta_T(t-t_0) y_{1n}(t_0-0) + \\ &+ \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \delta_T(t-t_1) y_{1n}(t_1-0), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} y_{1n}(t) &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0-0)|} \Phi(T, \lambda, t-t_0) y_{1n}(t_0-0) + \\ &+ \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \Phi(T, \lambda, t-t_1) y_{1n}(t_1-0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Подставляя сюда $t=t_0-0$ и $t=t_1-0$, получим, как и при выводе уравнения (4.31), характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0-0)|} \Phi(T, \lambda, -0) & - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \Phi(T, \lambda, t_1-t_1-0) \\ - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0-0)|} \Phi(T, \lambda, t_1-t_0-0) & 1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \Phi(T, \lambda, -0) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.21)$$

Рассмотрим более подробно соответствующие выкладки для того случая, когда передаточная функция (2) имеет вид

$$W(p) = \frac{m(p)}{p d(p)} = \frac{m_1 p^{n-1} + \dots + m_n}{p(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)} \quad (5.22)$$

и разложение передаточной функции $W(p)$ на простые дроби представляется в форме

$$W(p) = \frac{\gamma_0}{p} + \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p - p_\rho}, \quad (5.23)$$

причем среди чисел p_ρ нет чисто мнимых или равных нулю. При этом

$$\gamma_0 = \frac{m(0)}{d(0)} = \frac{m_n}{a_n}, \quad \gamma_\rho = \frac{m(p_\rho)}{p_\rho d'(p_\rho)}. \quad (5.24)$$

В этом случае ряд (13) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_B(T, t) = \frac{m_n}{a_n} \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ki\omega t}}{ki\omega} + \\ + \sum_{\rho=1}^n \gamma_\rho \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ki\omega t}}{ki\omega - p_\rho}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Но известно [101], что

$$\frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ki\omega t}}{ki\omega} = \frac{1}{2} - \frac{t}{T}, \quad 0 < t < T, \quad (5.26)$$

Кроме того, из (II.3.67) следует, что

$$\frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ki\omega t}}{ki\omega - p_\rho} = \frac{e^{p_\rho t}}{1 - e^{p_\rho T}} + \frac{1}{Tp_\rho}, \quad 0 < t < T. \quad (5.27)$$

Поэтому из (26) и (27) имеем

$$\varphi_B(T, t) = \frac{m_n}{a_n} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right) + \frac{1}{T} \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} + \sum_{\rho=1}^n \gamma_\rho \frac{e^{p_\rho t}}{1 - e^{p_\rho T}}. \quad (5.28)$$

Учитывая (22) и (23), можно показать, что

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} = \frac{m_n a_{n-1} - m_{n-1} a_n}{a_n^2}. \quad (5.29)$$

Поэтому последнее выражение может быть представлено в виде

$$\varphi_{\text{в}}(T, t) = \frac{m_n a_{n-1} - m_{n-1} a_n}{T a_n^2} + \\ + \frac{m_n}{a_n} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right) + \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho} e^{\rho t}}{1 - e^{\rho T}}, \quad 0 < t < T. \quad (5.30)$$

Для вычисления функции $y_{\text{п}}(t)$ теперь можно воспользоваться уравнениями (12) и (30). Проще, однако, подставить в (14) выражение для $\varphi_{\text{в}}(T, t)$ в виде ряда и затем просуммировать получившееся выражение. Очевидно, с учетом (14) и (13) имеем

$$k_{\text{п}} \left[\int_{t_0}^{t_1} \varphi_{\text{в}}(T, t - \tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_0+T} \varphi_{\text{в}}(T, t - \tau) d\tau \right] = \\ = \frac{k_{\text{п}}}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} W(ki\omega) e^{ki\omega t} \left(\int_{t_0}^{t_1} e^{-ki\omega \tau} d\tau - \int_{t_1}^{t_0+T} e^{-ki\omega \tau} d\tau \right). \quad (5.31)$$

После интегрирования это приводит к выражению

$$\tilde{y}(t, T, t_0, t_1) = 2k_{\text{п}} [u(T, t - t_0) - u(T, t - t_1)] + y_{\text{нв}}(t), \quad (5.32)$$

где

$$y_{\text{нв}}(t) = \int_0^T \varphi_{\text{в}}(T, t - \tau) x_{\text{п}}(\tau) d\tau \quad (5.33)$$

и функция $u(T, t)$ определяется рядом

$$u(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{W(ki\omega)}{(ki\omega)} e^{ki\omega t}. \quad (5.34)$$

Из (32) следует, что

$$\tilde{y}(t_0, T, t_0, t_1) = 2k_{\text{п}} [u(T, 0) - u(T, t_0 - t_1)] + y_{\text{нв}}(t_0), \\ \tilde{y}(t_1, T, t_0, t_1) = 2k_{\text{п}} [u(T, t_1 - t_0) - u(T, 0)] + y_{\text{нв}}(t_1),$$

и, следовательно, уравнения периодов (16) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u(T, 0) - \frac{1}{2} u(T, t_0 - t_1) - \frac{1}{2} u(T, t_1 - t_0) = \\ = \frac{\sigma_0}{2k_p} - \frac{1}{4k_p} [y_{\text{нв}}(t_0) - y_{\text{нв}}(t_1)], \\ 1 - \frac{2(t_1 - t_0)}{T} = \frac{x_0}{k_p}. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

В автоколебательном случае, когда $t_0 = 0$, $y_{\text{нв}}(t) = 0$, из (35) имеем

$$\left. \begin{aligned} u(T, 0) - \frac{1}{2} u(T, -t_1) - \frac{1}{2} u(T, t_1) = \frac{\sigma_0}{2k_p}, \\ 1 - \frac{2(t_1 - t_0)}{T} = \frac{x_0}{k_p}. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Если передаточная функция $W(p)$ имеет вид (23), то легко найти замкнутое выражение для ряда (34). Для этого воспользуемся способом вычисления рядов типа (34), приведенным в [75]. Из (23) непосредственно следует, что

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{W_1(p)}{p^2} = \frac{\gamma_0}{p^2} - \frac{1}{p} \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} + \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} \frac{1}{p - p_\rho}. \quad (5.37)$$

Поэтому из (34) с учетом (29) имеем

$$\begin{aligned} u(T, t) = \frac{m_n}{a_n T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^n \frac{e^{k i \omega t}}{(k i \omega)^2} + \\ + \frac{m_{n-1} a_n - m_n a_{n-1}}{a_n^2 T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{k i \omega t}}{k i \omega} + \\ + \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{k i \omega t}}{k i \omega - p_\rho}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Сумма первого ряда в правой части этого равенства, в соответствии с [75], равна

$$\frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{k i \omega t}}{(k i \omega)^2} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2T} - \frac{T}{12}, \quad 0 < t < T. \quad (5.39)$$

Поэтому, используя также соотношения (26) и (27), получим

$$u(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p_{\rho}^2} + \\ + \frac{m_n}{a_n} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2T} - \frac{T}{12} \right) + \frac{m_{n-1}a_n - m_na_{n-1}}{a_n^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right) + \\ + \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p_{\rho}} \frac{e^{p_{\rho}t}}{1 - e^{p_{\rho}T}} = \tilde{u}(t, T), \quad 0 < t < T. \quad (5.40)$$

Величину $\sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p_{\rho}^2}$ нетрудно вычислить через коэффициенты передаточной функции $W(p)$.

Так как, очевидно, имеем

$$0 < t_1 - t_0 < T, \quad -T < t_0 - t_1 < 0, \quad (5.41)$$

то из (40) непосредственно получаем

$$u(T, t_1 - t_0) = \tilde{u}(T, t_1 - t_0), \quad u(T, 0) = \tilde{u}(T, 0) \quad (5.42)$$

и, кроме того,

$$u(T, t_0 - t_1) = \tilde{u}(T, T - t_1 + t_0). \quad (5.43)$$

Подставляя (42), (43) и (40) в уравнения (35), получим замкнутую формулу для уравнений периодов.

Составим теперь характеристическое уравнение (21). Для этого отметим, что в данном случае по (23) и (II.3.60)

$$\varphi(T, \lambda, T) = \gamma_0 \frac{e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} + \\ + \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho} - \lambda)T}}{1 - e^{(p_{\rho} - \lambda)T}} = \tilde{\varphi}(T, \lambda, t), \quad 0 < t < T, \quad (5.44)$$

причем $\tilde{\varphi}(T, \lambda, t)$ — непрерывная функция t . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \varphi(T, \lambda, -0) &= \tilde{\varphi}(T, \lambda, 0), \\ \varphi(T, \lambda, t_1 - t_0) &= \tilde{\varphi}(T, \lambda, t_1 - t_0), \\ \varphi(T, \lambda, t_0 - t_1) &= \tilde{\varphi}(T, \lambda, T - t_1 + t_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Подставляя эти выражения в (21), получим искомое характеристическое уравнение:

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, 0) & -\frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, T - t_1 + t_0) \\ -\frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_0)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, t_1 - t_0) & 1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(t_1)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, 0) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.46)$$

§ 6. Автоколебания в релейной системе с изменяющимся запаздыванием

В настоящем параграфе изучаются симметричные автоколебания системы, содержащей кроме реле элемента изменяемого запаздывания, которое изменяется вместе с

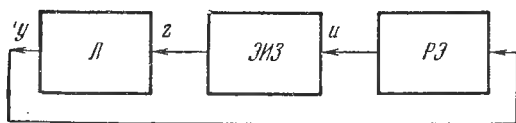


Рис. 44.

переключением реле [94]. Структурная схема системы изображена на рис. 44, где *РЭ* — релейный элемент с зоной нечувствительности, характеристика которого изображена на рис. 36, б; *ЭИЗ* — элемент изменяющегося запаздывания, являющийся нелинейным устройством, которое преобразует входной сигнал по правилу

$$z = \begin{cases} u(t - \tau_1) & \text{при } u = \pm k_p, \\ u(t - \tau_2) & \text{при } u = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где τ_1 и τ_2 — неотрицательные постоянные; *Л* — линейная часть системы, которую для простоты изложения будем полагать стационарной и имеющей передаточную функцию $W(p)$. Последовательное соединение *РЭ* и *ЭИЗ* представляет собой сложное релейное устройство

$$z = U_n(y), \quad (6.2)$$

так как его выходной сигнал $z(t)$ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов.

Пусть $y(t)$, входной сигнал релейного элемента, является непрерывной функцией t . Обозначим через t_i моменты переключения реле, определяемые условиями

$$y(t_i) = \pm \sigma_0. \quad (6.3)$$

Назовем интервал $t_{i-1} < t < t_i$ интервалом первого типа S_i , если $|y(t)| < \sigma_0$ при $t \in S_i$, и интервалом второго типа R_i , если $|y(t)| > \sigma_0$ при $t \in R_i$.

Тогда из (1) следует, что

$$z(t) = \begin{cases} u(t - \tau_1), & t \in R_i, \\ u(t - \tau_2), & t \in S_i. \end{cases} \quad (6.4)$$

Отсюда следует, что в зависимости от величин τ_1 и τ_2 и продолжительности импульсов, поступающих с реле, функция $z(t)$ может, вообще говоря, претерпевать разрывы в моменты:

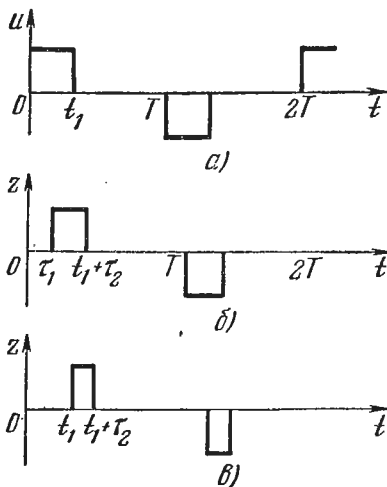


Рис. 45.

$$\left. \begin{aligned} 1) & \quad t = t_i; \\ 2) & \quad t = \bar{t}_i = t_i + \tau_1, \\ 3) & \quad t = \bar{\bar{t}}_i = t_i + \tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Таким образом, ЭИЗ может существенно деформировать входной сигнал — изменить число и длительность составляющих его импульсов. Поэтому в рассматриваемой системе возможны периодические режимы весьма сложного характера.

Далее мы ограничимся рассмотрением случаев, когда в системе существуют простейшие симметричные автоколебания и выходной сигнал реле имеет вид, изображенный на рис. 45, а. При этом выходной сигнал $z(t)$ также будет симметричным, но может иметь различную

форму в зависимости от соотношения между величинами τ_1 , τ_2 . На рис. 45, б изображен сигнал $z(t)$ при

$$t_1 > \tau_1, T - t_1 > \tau_1, t_1 > \tau_2, T - t_1 > \tau_2; \quad (6.6)$$

рис. 45, в соответствует случаю

$$t_1 < \tau_1 < T - t_1, \tau_2 < t_1, \tau_2 < T - t_1 \quad (6.7)$$

и т. д.

В дальнейшем для простоты предположим, что выполнены соотношения (6). Этот случай может, например, иметь место, если изучаемая система имеет автоколебательный режим при отсутствии запаздывания, а величины τ_1 и τ_2 — достаточно малые.

Предполагая, что в автоколебательном режиме функции $z(t)$ и $u(t)$ имеют вид, изображенный на рис. 45, а, б, легко построить уравнения периодов для определения величин t_1 и T . Для этого заметим, что из рис. 45, б и формулы (2.30) следует, что в автоколебательном режиме координата $y(t)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \int_0^T \psi(2T, t - \tau) z_n(\tau) d\tau = \\ &= k_p \int_{\tau_1}^{t_1 + \tau_2} \psi(2T, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} \psi(2T, t - \tau) &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega_1] e^{(2k+1)i\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

а линейный элемент системы предполагается нерезонансным.

Учитывая рис. 36, б, из (8) при $t=0$ и $t=t_1$ имеем

$$y_n(0) = \sigma_0, \quad y_n(t_1) = \sigma_0, \quad (6.10)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} y_n(0) &= k_p \int_{\tau_1}^{t_1 + \tau_2} \psi(2T, -\tau) d\tau = \sigma_0, \\ y_n(t_1) &= k_p \int_{\tau_1}^{t_1 + \tau_2} \psi(2T, t_1 - \tau) d\tau = \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Соотношения (11) и представляют собой искомые уравнения периодов.

При этом, естественно, решение t_1, T уравнений (11) действительно определяет автоколебательный режим, если выполнены условия правильного направления переключения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_n(t_0 - 0) > 0, & \quad \dot{y}_n(t_0 + 0) > 0, \\ \dot{y}_n(t_1 - 0) < 0, & \quad \dot{y}_n(t_1 + 0) < 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

условие отсутствия дополнительных переключений:

$$\left. \begin{aligned} y(t) > \sigma_0, & \quad 0 < t < t_1, \\ |y(t)| < \sigma_0, & \quad t_1 < t < T, \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

а также при найденных t_1 и T выполнены условия (6).

Перейдем теперь к составлению уравнений в вариациях относительно найденного автоколебательного режима, для чего воспользуемся общими соотношениями § 3. В данном случае внутри половины периода $0 < t < T$ имеются два момента переключения выходного сигнала $z(t)$ дискретного элемента (2):

$$\bar{t}_1 = \tau_1, \quad \bar{\bar{t}}_2 = t_1 + \tau_2, \quad (6.14)$$

которые определяются условиями переключения (3) и (5). Разрывы функции $z_n(t)$ соответственно равны

$$\Delta z_n(\bar{t}_1) = k_p, \quad \Delta z_n(\bar{\bar{t}}_2) = -k_p. \quad (6.15)$$

При этом из (3) и (5) по (3.50) следует, что

$$\frac{d\bar{t}_1}{d\alpha}(\alpha=0) = -\frac{y_1(-0)}{\dot{y}_n(-0)}, \quad \frac{d\bar{\bar{t}}_2}{d\alpha}(\alpha=0) = -\frac{y_1(t_1-0)}{\dot{y}_n(t_1-0)}. \quad (6.16)$$

Если учесть дополнительно, что внутри периода $2T$ имеются еще два момента переключения:

$$\bar{t}_1 + T, \quad \bar{\bar{t}}_2 + T,$$

и симметрию периодического режима, то с учетом выписанных соотношений и общей формулы (3.55) уравнения в вариациях для рассматриваемой задачи можно

представить в виде

$$y_1 = W(p) z_1, \quad z_1 = \frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_T(t - \bar{t}_1) y_1(t-0) + \\ + \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \delta_T(t - \bar{\bar{t}}_2) y_1(t-0). \quad (6.17)$$

Вводя замену (4.22), из (17) получим

$$\dot{y}_{1n} = W(p + \lambda) z_{1n}, \quad z_{1n} = \frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_T(t - \bar{t}_1) y_{1n}(\bar{t}_1 - 0) + \\ + \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \delta_T(t - \bar{\bar{t}}_2) y_{1n}(\bar{\bar{t}}_2 - 0),$$

откуда, как и ранее, получается

$$y_{1n}(t) = \frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(T, \lambda, t - \bar{t}_1) y_{1n}(\bar{t}_1 - 0) + \\ + \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \varphi(T, \lambda, t - \bar{\bar{t}}_2) y_{1n}(\bar{\bar{t}}_2 - 0). \quad (6.18)$$

Подставляя сюда $t = \bar{t}_1 - 0$ и $t = \bar{\bar{t}}_2 - 0$, получим

$$y_{1n}(\bar{t}_1 - 0) = \frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(T, \lambda, -0) y_{1n}(\bar{t}_1 - 0) + \\ + \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \varphi(T, \lambda, \bar{t}_1 - \bar{\bar{t}}_2 - 0) y_{1n}(\bar{\bar{t}}_2 - 0), \\ y_{1n}(\bar{\bar{t}}_2 - 0) = \frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(T, \lambda, \bar{\bar{t}}_2 - \bar{t}_1 - 0) y_{1n}(\bar{t}_1 - 0) + \\ + \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \varphi(T, \lambda, -0) y_{1n}(\bar{\bar{t}}_2 - 0),$$

откуда получается характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(T, \lambda, -0) & -\frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \varphi(T, \lambda, \bar{t}_1 - \bar{\bar{t}}_2 - 0) \\ -\frac{k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(T, \lambda, \bar{\bar{t}}_2 - \bar{t}_1 - 0) & 1 - \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1-0)|} \varphi(T, \lambda, -0) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.19)$$

Если СИЧХ $\varphi(T, \lambda, t)$, соответствующую линейной части системы, можно записать в конечном виде, то соответственно в конечном виде можно записать уравнения периодов (11) и характеристическое уравнение (19).

Пример 6.1. Пусть

$$W(p) = -\frac{1}{(p-a)(p-b)}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0. \quad (6.20)$$

Подставляя ряд Фурье для $\psi(2T, t)$ в (8), после интегрирования найдем

$$y_n(t) = k_p [f(T, t - \tau_1) - f(T, t - t_1 - \tau_2)], \quad (6.21)$$

где

$$f(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W[(2k+1)i\omega_1]}{(2k+1)i\omega_1} e^{(2k+1)i\omega_1 t}. \quad (6.22)$$

Но в силу (20) ряд (22) представляет собой функцию $\psi(2T, t)$, составленную по передаточной функции

$$\begin{aligned} \overline{W}(p) &= \frac{1}{p(p-a)(p-b)} = \\ &= -\frac{1}{ab} \frac{1}{p} - \frac{1}{(a-b)a} \frac{1}{p-a} - \frac{1}{b(b-a)} \frac{1}{(p-b)}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Поэтому по (II. 3.73) и (23) имеем

$$\left. \begin{aligned} f(T, t) &= -\frac{1}{2ab} - \frac{1}{(a-b)a} \frac{e^{at}}{1+e^{aT}} - \\ &\quad - \frac{1}{(b-a)b} \frac{e^{bt}}{1+e^{bT}} = \tilde{f}(T, t), \\ f(T, t) &= -f(T, t+T), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

С учетом (24), (21) и (10) получаем уравнения периодов для данного случая:

$$\left. \begin{aligned} -\tilde{f}(T, T - \tau_1) + \tilde{f}(T, T - t_1 - \tau_2) &= \frac{\sigma_0}{k_p}, \\ \tilde{f}(T, t_1 - \tau_1) + \tilde{f}(T, T - \tau_2) &= \frac{\sigma_0}{k_p}. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Кроме того, по (20) и (II. 3.60)

$$\begin{aligned} \varphi(T, \lambda, t) &= \frac{1}{b-a} \frac{e^{(a-\lambda)t}}{1-e^{(a-\lambda)T}} + \frac{1}{a-b} \frac{e^{(b-\lambda)t}}{1-e^{(b-\lambda)T}} = \\ &= \tilde{\varphi}(T, \lambda, t), \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Поэтому характеристическое уравнение (19) в данном случае имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{k_p}{|\dot{y}_n(0)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, 0) & -\frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, T + \tau_1 - \tau_2 - t_1) \\ -\frac{k_p}{|\dot{y}_n(0)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, t_1 + \tau_2 - \tau_1) & 1 - \frac{k_p}{|\dot{y}_n(t_1)|} \bar{\varphi}(T, \lambda, 0) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.27)$$

§ 7. Автоколебания в системе с логическим устройством

Логические устройства представляют собой своеобразный класс релейных операторов с несколькими входами и выходами, каждый из которых может иметь некоторое число дискретных значений. Для таких систем

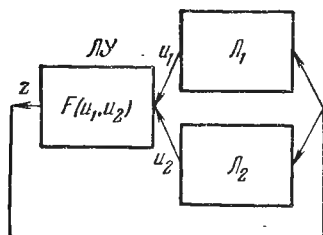


Рис. 46.

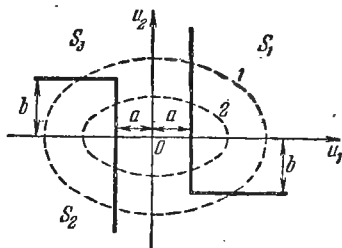


Рис. 47.

характерно возникновение периодических автоколебательных установившихся режимов.

В этом параграфе на основе предлагаемого подхода рассматриваются автоколебания системы с простейшим симметричным логическим устройством, схема которого приведена в [58]. Структурная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 46, где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — линейные стационарные элементы с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$, ЛУ — логическое устройство. Уравнения системы имеют вид

$$z = F(u_1, u_2), \quad u_1 = W_1(p)z, \quad u_2 = W_2(p)z. \quad (7.1)$$

Уравнение $z = F(u_1, u_2)$ определяет закон управления, осуществляемый логическим устройством. Его удобно задать графически на плоскости u_1, u_2 (рис. 47) [58]. Ана-

литически закон управления может быть записан в виде

$$z = \begin{cases} 1, & u_1, u_2 \in S_1, \\ -1, & u_1, u_2 \in S_2, \\ 0, & u_1, u_2 \in S_3. \end{cases} \quad (7.2)$$

Соответствующие области S_i отмечены на рис. 47. Более компактно логический закон управления (2) может быть представлен с помощью основных логических операций [86].

Рассмотрим простейший симметричный автоколебательный режим, когда каждая из областей S_1 и S_2 проходится за период только один раз.

В принципе возможны три варианта таких режимов, два из них изображены на рис. 47 пунктиром и отмечены цифрами 1 и 2. Как видно из рис. 47, эти варианты симметричного автоколебательного режима отличаются друг от друга характером переключений за период. При этом каждый из предельных циклов, изображенных на рис. 47, может обходиться в разных направлениях, что также соответствует различным вариантам автоколебательного режима. В силу автономности системы начало отсчета времени всегда можно выбрать таким образом, чтобы

$$z_{\text{п}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T, \end{cases} \quad (7.3)$$

причем по предположению

$$z_{\text{п}}(t) = -z_{\text{п}}(t + T). \quad (7.4)$$

Если соотношения (3) действительно имеют место, то по (2.30) можно сразу написать выражения для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в автоколебательном режиме:

$$\left. \begin{aligned} u_{1\text{п}}(t) &= \int_0^{t_1} \psi_1(2T, t - \tau) d\tau, \\ u_{2\text{п}}(t) &= \int_0^{t_1} \psi_2(2T, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

где ψ_1 и ψ_2 — соответствующие ИЧХ второго рода,

$$\psi_s(2T, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_s[(2k+1)\omega_1] e^{(2k+1)\omega_1 t}, \quad (7.6)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T} \quad (s=1, 2).$$

Используя выражения (5), можно составить уравнения периодов и условия правильного направления переключения для различных вариантов симметричного автоколебательного режима. Для предельного цикла 1 на рис. 47 условия переключения в том случае, если он проходит по часовой стрелке, имеют вид

$$u_{1н}(0) = a, \quad u_{2н}(t_1) = -b, \quad (7.7)$$

а условия правильного направления переключения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{1н}(-0) > 0, \quad \dot{u}_{1н}(+0) > 0, \\ \dot{u}_{2н}(t_1-0) < 0, \quad \dot{u}_{2н}(t_1+0) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

При противоположном направлении обхода предельного цикла вместо (7) и (8) имеем соответственно

$$u_{2н}(0) = -b, \quad u_{1н}(t_1) = a, \quad (7.9)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{2н}(-0) > 0, \quad \dot{u}_{2н}(+0) > 0, \\ \dot{u}_{1н}(t_1-0) < 0, \quad \dot{u}_{1н}(t_1+0) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Для предельного цикла 2 условия переключения независимо от направления обхода следующие:

$$u_{1н}(0) = a, \quad u_{1н}(t_1) = a, \quad (7.11)$$

а условия правильного направления переключения:

$$\dot{u}_{1н}(\pm 0) \geq 0, \quad \dot{u}_{1н}(t_1 \pm 0) \leq 0 \quad (7.12)$$

в зависимости от направления обхода. При этом, как и ранее, предполагается, что функции u_1 и u_2 непрерывны и в моменты переключения могут иметь разрывную, но конечную производную слева и справа. Соотношения (5) совместно с (7), (9) или (12) дают уравнения периодов для соответствующей задачи. В дальнейшем для конкретности ограничимся рассмотрением случая (7).

При этом соответствующие уравнения периодов имеют вид

$$\int_0^{t_1} \psi_1(2T, -\tau) d\tau = a, \quad \int_0^{t_1} \psi_2(2T, t_1 - \tau) d\tau = -b. \quad (7.13)$$

Если пара чисел t_1, T является решением уравнений периодов (13), то ей действительно соответствует автоколебательный режим при выполнении ряда дополнительных условий, вытекающих из рис. 47:

1. Условия правильного направления переключения (8).

2. Условия отсутствия дополнительных переключений

$$\left. \begin{aligned} u_1, u_2 &\in S_1, & 0 < t < t_1, \\ u_1, u_2 &\in S_3, & t_1 < t < T, \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

которые означают, что на интервале $0 < t < t_1$ изображающая точка на фазовой плоскости u_1, u_2 должна находиться в области S_1 , а на интервале $t_1 < t < T$ — в области S_3 .

Перейдем теперь к исследованию устойчивости симметричного периодического режима, определяемого уравнениями периодов (13), для чего составим соответствующие уравнения в вариациях. Основная трудность здесь состоит в варьировании уравнения логического звена. Здесь можно использовать общие соображения § 3. Некоторое отличие заключается в том, что дискретный нелинейный элемент имеет два входа. Тем не менее общий принцип построения уравнений в вариациях остается применимым, по существу, без всяких изменений.

В соответствии с § 3 необходимо сделать замену

$$\left. \begin{aligned} z &= z_{\text{п}}(t) + \alpha z_1(t, \alpha), & u_1 &= u_{1\text{п}} + \alpha u_{11}(t, \alpha), \\ u_2 &= u_{2\text{п}} + \alpha u_{21}(t, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

где индекс «п» соответствует найденному периодическому режиму, и вычислить обобщенную производную

$$\frac{D}{d\alpha} F[u_{1\text{п}}(t) + \alpha u_{11}(t, \alpha), u_{2\text{п}}(t) + \alpha u_{21}(t, \alpha)], \quad (7.16)$$

после чего положить $\alpha = 0$. Но так как функция F принимает значения, не зависящие от α в моменты

переключения, определяемые уравнениями (2), то по (I. 4.32)

$$\frac{dF}{d\alpha} = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tilde{t}_i) \Delta \tilde{F}_i \frac{d\tilde{t}_i}{d\alpha} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tilde{\tilde{t}}_i) \Delta \tilde{\tilde{F}}_i \frac{d\tilde{\tilde{t}}_i}{d\alpha}, \quad (7.17)$$

где моменты переключения $\tilde{t}_i(\alpha)$ и $\tilde{\tilde{t}}_i(\alpha)$ определяются соответственно уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u_1(\tilde{t}_i) &= u_{1n}(\tilde{t}_i) + \alpha u_{11}(\tilde{t}_i, \alpha) = (-1)^i a, \\ u_2(\tilde{\tilde{t}}_i) &= u_{2n}(\tilde{\tilde{t}}_i) + \alpha u_{21}(\tilde{\tilde{t}}_i, \alpha) = (-1)^{i+1} b, \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

$\Delta \tilde{F}_i$, $\Delta \tilde{\tilde{F}}_i$ — разрывы функции F в моменты $\tilde{t}_i$ и $\tilde{\tilde{t}}_i$. С помощью соображений, аналогичных уже неоднократно использовавшимся выше, легко получить, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{t}_i}{d\alpha} &= - \frac{u_{11}(\tilde{t}_i - 0)}{\dot{u}_{1n}(\tilde{t}_i - 0)} = - \frac{u_{11}(\tilde{t}_i + 0)}{\dot{u}_{1n}(\tilde{t}_i + 0)}, \\ u_{11}(t) &= u_{11}(t, 0), \\ \frac{d\tilde{\tilde{t}}_i}{d\alpha} &= - \frac{u_{21}(\tilde{\tilde{t}}_i - 0)}{\dot{u}_{2n}(\tilde{\tilde{t}}_i - 0)} = - \frac{u_{21}(\tilde{\tilde{t}}_i + 0)}{\dot{u}_{2n}(\tilde{\tilde{t}}_i + 0)}, \\ u_{21}(t) &= u_{21}(t, 0). \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Далее для конкретности используем только первые из этих формул. При $\alpha \rightarrow 0$ в силу симметрии периодического режима

$$\tilde{t}_i \rightarrow iT, \quad \tilde{\tilde{t}}_i \rightarrow t_1 + iT. \quad (7.20)$$

В силу выбора отсчета времени при $\alpha \rightarrow 0$ имеем

$$\Delta \tilde{F}_i \rightarrow (-1)^i, \quad \Delta \tilde{\tilde{F}}_i \rightarrow (-1)^{i+1}. \quad (7.21)$$

Поэтому с учетом условий правильного направления переключения (8) при $\alpha \rightarrow 0$

$$\Delta \tilde{F}_i \frac{d\tilde{t}_i}{d\alpha} \rightarrow - \frac{u_{11}(iT - 0)}{|\dot{u}_{1n}(-0)|}, \quad \Delta \tilde{\tilde{F}}_i \frac{d\tilde{\tilde{t}}_i}{d\alpha} \rightarrow - \frac{u_{21}(t_1 + iT - 0)}{|\dot{u}_{2n}(t_1 - 0)|}. \quad (7.22)$$

Если теперь в (17) перейти к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, то с учетом (19) — (22) уравнение варьированного логического звена приобретает вид

$$z_1 = \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(-0)|} \delta_T(t) u_{11}(t-0) + \\ + \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1-0)|} \delta_T(t-t_1) u_{21}(t-0). \quad (7.23)$$

Так как уравнения линейных элементов при переходе к уравнениям в вариациях не меняются, то окончательно уравнения в вариациях примут вид

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= W_1(p) z_1, \quad u_{21} = W_2(p) z_1, \\ z_1 &= \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \delta_T(t) u_{11}(t-0) + \\ &+ \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1-0)|} \delta_T(t-t_1) u_{21}(t-0). \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Для исследования устойчивости составим характеристическое уравнение импульсной системы (24). Для этого, как обычно, положим

$$z_1 = e^{\lambda t} z_{1n}, \quad u_{11} = e^{\lambda t} v_{1n}, \quad u_{21} = e^{\lambda t} v_{2n}, \quad (7.25)$$

где функции с индексом «п» имеют период T . С учетом (25) уравнения (24) примут вид

$$\left. \begin{aligned} v_{1n} &= W_1(p + \lambda) z_{1n}, \quad v_{2n} = W_2(p + \lambda) z_{1n}, \\ z_{1n} &= \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \delta_T(t) v_{1n}(t-0) + \\ &+ \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1-0)|} \delta_T(t-t_1) v_{2n}(t-0). \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Из (26) сразу получаем

$$\left. \begin{aligned} v_{1n}(t) &= \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \varphi_1(T, \lambda, t) v_{1n}(-0) + \\ &+ \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1-0)|} \varphi_1(T, \lambda, t-t_1) v_{2n}(t_1-0), \\ v_{2n}(t) &= \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \varphi_2(T, \lambda, t) v_{1n}(-0) + \\ &+ \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1-0)|} \varphi_2(T, \lambda, t-t_1) v_{2n}(t_1-0), \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

где, как всегда,

$$\varphi_l(T, \lambda, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_l(\lambda + ki\omega) e^{ki\omega t}.$$

Подставляя в первое уравнение (27) $t = -0$ и во второе $t = t_1 - 0$, получаем

$$\begin{aligned} v_{1n}(-0) &= \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \varphi_1(T, \lambda, -0) v_{1n}(-0) + \\ &\quad + \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1 - 0)|} \varphi_1(T, \lambda, -t_1 - 0) v_{2n}(t_1 - 0), \\ v_{2n}(t_1 - 0) &= \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \varphi_2(T, \lambda, t_1 - 0) v_{1n}(-0) + \\ &\quad + \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1 - 0)|} \varphi_2(T, \lambda, -0) v_{2n}(t_1 - 0). \end{aligned}$$

Условия совместности этих уравнений и приводят к искомому характеристическому уравнению, которое имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \varphi_1(T, \lambda, -0) & - \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1 - 0)|} \varphi_1(T, \lambda, -t_1 - 0) \\ - \frac{1}{|\dot{u}_{1n}(-0)|} \varphi_2(T, \lambda, t_1 - 0) & 1 - \frac{1}{|\dot{u}_{2n}(t_1 - 0)|} \varphi_2(T, \lambda, -0) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.28)$$

Это уравнение, как следует из сказанного в § 3, имеет в полосе $0 \leq \operatorname{Im} \lambda < \omega$ по крайней мере один корень с вещественной частью, равной нулю, что является следствием автономности системы.

Пример 7.1. Для иллюстрации сказанного составим уравнения периодов и характеристическое уравнение для системы, изучавшейся приближенно в работе [58]. Структурная схема системы дана на рис. 48, где

$$\left. \begin{aligned} (T_0 p + 1) p x &= k_0 f, \\ (T_1 p + 1) u_1 &= k_1 x, \\ (T_3 p + 1) y &= k_3 z, \\ (T_4 p + 1) f &= -k_4 y. \end{aligned} \quad \begin{aligned} (T_2 p + 1) u_2 &= k_2 p x, \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Структурная схема рис. 48 легко приводится к виду (1), где

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= - \frac{k_0 k_1 k_3 k_4}{(T_0 p + 1)(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)p}, \\ W_2(p) &= - \frac{k_0 k_2 k_3 k_4}{(T_0 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Для составления уравнений периодов заметим сначала, что если подставить (6) в (5), то получим

$$\left. \begin{aligned} u_{1п}(t) &= \hat{f}_1(T, t) - f_1(T, t - t_1), \\ u_{2п}(t) &= \hat{f}_2(T, t) - f_2(T, t - t_1), \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

где

$$f_s(T, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{W_s[(2k+1)i\omega_1]}{(2k+1)i\omega_1} e^{ki\omega_1 t} \quad (7.32)$$

$$(s = 1, 2), \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T}.$$

С учетом (31) уравнения периодов, (7), (13) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(T, 0) - f_1(T, -t_1) &= a, \\ f_2(T, t_1) - f_2(T, 0) &= -b. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Сумму рядов (32) легко найти, если учесть, что они представляют собой ряды вида (II. 3.13) для передаточных функций

$$\bar{W}_s(p) = \frac{W_s(p)}{p}, \quad s = 1, 2. \quad (7.34)$$

В рассматриваемом примере, по (30) и (34),

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_1(p) &= \frac{\alpha_0}{p^2} + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p + \frac{1}{T_0}} + \frac{\alpha_3}{p + \frac{1}{T_1}} + \\ &\quad + \frac{\alpha_4}{p + \frac{1}{T_3}} + \frac{\alpha_5}{p + \frac{1}{T_4}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

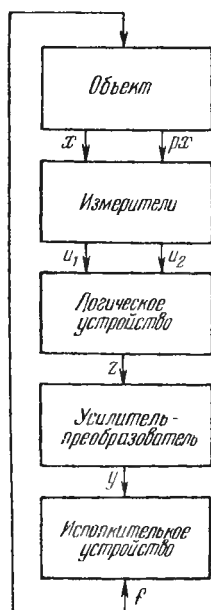


Рис. 48.

$$\overline{W}_2(p) = \frac{\beta_1}{p} + \frac{\beta_2}{1 + \frac{1}{T_0}} + \frac{\beta_3}{p + \frac{1}{T_2}} + \frac{\beta_4}{p + \frac{1}{T_3}} + \frac{\beta_5}{p + \frac{1}{T_4}},$$

где α_i , β_i — постоянные, вычисляемые элементарно. Тогда, учитывая, что [75]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)i\omega_1 t}}{(2k+1)i\omega_1} &= \frac{1}{2}, \quad 0 < t < T, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T}, \\ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)i\omega_1 t}}{[(2k+1)i\omega_1]^2} &= \frac{t}{2} - \frac{T}{4}, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

а также (II.3.73), получим, что при $0 < t < T$

$$\left. \begin{aligned} f_1(T, t) &= \alpha_0 \left(\frac{t}{2} - \frac{T}{4} \right) + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2 e^{-t/T_0}}{1 + e^{-T/T_0}} + \\ &+ \frac{\alpha_3 e^{-t/T_1}}{1 + e^{-T/T_1}} + \frac{\alpha_4 e^{-t/T_3}}{1 + e^{-T/T_3}} + \frac{\alpha_5 e^{-t/T_4}}{1 + e^{-T/T_4}} = \tilde{f}_1(T, t), \\ f_2(T, t) &= \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2 e^{-t/T_0}}{1 + e^{-T/T_0}} + \frac{\beta_3 e^{-t/T_2}}{1 + e^{-T/T_2}} + \\ &+ \frac{\beta_4 e^{-t/T_3}}{1 + e^{-T/T_3}} + \frac{\beta_5 e^{-t/T_4}}{1 + e^{-T/T_4}} = \tilde{f}_2(T, t). \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Используя (37), можно сразу получить замкнутую форму уравнений периодов (7). При этом следует учесть только, что

$$f_s(T, -t_1) = -f_s(T, T - t_1),$$

причем $0 < T - t_1 < T$, так что можно воспользоваться (37). Далее, составляя СИЧХ $\varphi_s(T, \lambda, t)$ для передаточных функций (30), можно получить характеристическое уравнение (28). В данном примере СИЧХ φ_s , очевидно, непрерывны; поэтому характеристическое уравнение можно взять в виде

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{\tilde{\varphi}_1(T, \lambda, 0)}{|\dot{u}_{1n}(0)|} & - \frac{\tilde{\varphi}_1(T, \lambda, T - t_1)}{|\dot{u}_{2n}(t_1)|} \\ - \frac{\tilde{\varphi}_2(T, \lambda, t_1)}{|\dot{u}_{2n}(0)|} & 1 - \frac{\tilde{\varphi}_2(T, \lambda, 0)}{|\dot{u}_{2n}(t_1)|} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.38)$$

На подробностях соответствующих выкладок останавливаться не будем, так как они достаточно просты. Если положить $z = e^{\lambda T}$, то из (38) получится алгебраическое уравнение относительно z . Если корни этого уравнения, за исключением одного, равного единице, лежат внутри единичного круга, то автоколебательный режим является устойчивым.

§ 8. Автоколебания релейных экстремальных систем

Известно, что для релейных экстремальных систем автоколебательный режим около экстремума показателя качества является основным рабочим режимом. Задача

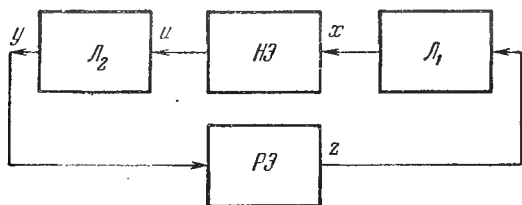


Рис. 49.

исследования автоколебаний релейной экстремальной системы интересна тем, что в ней в различных частях основного контура управления наблюдаются колебания различного периода.

В соответствии с [54] рассмотрим систему, структурная схема которой изображена на рис. 49, где L_1 и L_2 — линейные стационарные звенья, HZ — статическая характеристика объекта регулирования, которую считаем четной, PZ — реле с характеристикой, изображенной на рис. 38. Характеристика этого реле соответствует регулированию на максимум показателя качества. Этим случаем далее ограничимся.

Уравнения рассматриваемой системы могут быть представлены в виде

$$u = f(x), \quad y = W_2(p)u, \quad z = U_d(y), \quad x = W_1(p)z, \quad (8.1)$$

где U_d — характеристика реле, а в передаточной функции $W_2(p)$ учтена характеристика формирующего

устройства. Рассмотрим задачу об исследовании автоколебательных режимов системы (1), в которой выходная координата реле является периодической и симметричной:

$$z_n(t) = z_n(t + 2T), \quad z_n(t) = -z_n(t + T). \quad (8.2)$$

При этом для простоты изложения ограничимся рассмотрением периодического режима простейшего типа, когда внутри половины периода происходит только одно переключение реле [54]. В этом случае в силу автономности системы можно полагать, что

$$z_n(t) = \begin{cases} k_p, & 0 < t < T, \\ -k_p, & T < t < 2T, \end{cases} \quad (8.3)$$

откуда следует, что

$$x_n(t) = k_p \int_0^T \psi_1(2T, t - \tau) d\tau. \quad (8.4)$$

В силу четности функции $f(x)$

$$\begin{aligned} u_n(t + T) &= f[x_n(t + T)] = f[-x_n(t)] = \\ &= f[x_n(t)] = u_n(t). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Поэтому функция $u_n(t)$ имеет период T . В соответствии с (2.8)

$$y_n(t) = \int_0^T \varphi_2(T, t - \tau) u_n(\tau) d\tau. \quad (8.6)$$

В силу выбранного начала отсчета времени

$$y_n(0) = -\sigma_0. \quad (8.7)$$

Совместно с выражениями (4) и (6) последнее выражение представляет собой уравнение, из которого должна быть определена величина T . Если некоторое число T является корнем уравнения (7), то ему действительно соответствует автоколебательный режим, если выполняются условия правильного направления переключения

$$\dot{y}(-0) > 0, \quad \dot{y}(+0) > 0$$

и условие отсутствия дополнительных переключений на интервале $0 < t < T$.

Для исследования устойчивости найденного периодического режима составим уравнения в вариациях, полагая, как и ранее,

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= z_n(t) + \alpha z_1(t, \alpha), & y(t) &= y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha), \\ u(t) &= u_n(t) + \alpha u_1(t, \alpha), & x(t) &= x_n(t) + \alpha x_1(t, \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Тогда получим из (1)

$$y_1(t) = W_2(p) u_1(t), \quad x_1(t) = W_2(p) z_1(t), \quad (8.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y_1(t, 0), & u_1(t) &= u_1(t, 0), \\ x_1(t) &= x_1(t, 0), & z_1(t) &= z_1(t, 0). \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Функцию $f(x)$ предполагаем непрерывной; тогда

$$u_1(t) = a(t) x_1(t), \quad a(t) = \frac{df}{dx} [x = x_n(t)]. \quad (8.11)$$

Для релейного элемента, с учетом условий переключения (7), получаем

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t) y_1(t-0) - \\ &\quad - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t-T) y_1(t-0). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Поэтому уравнения в вариациях получаются как уравнения импульсной системы с периодом $2T$:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W_2(p) u_1, & x_1 &= W_1(p) z_1, & u_1 &= a(t) x_1, \\ z_1 &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t) y_1(t-0) - \\ &\quad - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t-T) y_1(t-0). \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Для составления характеристического уравнения импульсной системы (13) воспользуемся соображениями § 7 гл. IV. Заметим, что если обозначить

$$W(p, t) = W_1(p) \int_0^{2T} \Phi_2(2T, \lambda, t-q) a(q) dq, \quad (8.14)$$

то уравнения (13) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p, t) z_1, \\ z_1 &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t) y_1(t-0) - \\ &\quad - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t-T) y_1(t-0). \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Если положить

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda t} y_{1n}(t), & z_1(t) &= e^{\lambda t} z_{1n}(t), \\ y_{1n}(t) &= y_{1n}(t+2T), & z_{1n}(t) &= z_{1n}(t+2T), \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} y_{1n} &= W(p + \lambda t) z_{1n}, \\ z_{1n} &= \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t) y_{1n}(-0) - \\ &\quad - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \delta_{2T}(t-T) y_{1n}(T-0). \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Легко заметить, что уравнения (17) являются частным случаем уравнений (IV.7.34) при

$$W_{1n}(p, t) = W_{2n}(p, t) = W(p, t), \quad t_0 = T \quad (8.18)$$

и периоде $2T$.

При этом, если учитывать возможную разрывность СИЧХ $\varphi(2T, \lambda, t, \tau)$, то из (17) получим искомое характеристическое уравнение:

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(2T, \lambda, -0, -0) & \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(2T, \lambda, -0, -T-0) \\ -\frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(2T, \lambda, T-0, T-0) & 1 - \frac{2k_p}{|\dot{y}_n(-0)|} \varphi(2T, \lambda, T-0, -0) \end{vmatrix} = 0. \quad (8.19)$$

При этом из (14) и (II.6.47) непосредственно следует, что в данном случае

$$\begin{aligned} \varphi(2T, \lambda, t, t-\tau) &= \\ &= \int_0^{2T} \varphi_2(2T, \lambda, t-q) a(q) \varphi_1(2T, \lambda, q-\tau) dq. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Если передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ дробно-рациональные либо отличаются от них экспоненциальным множителем, то с помощью способов, изложенных выше, нетрудно получить замкнутую форму уравнения периодов (7) и характеристического уравнения (19).

§ 9. Автоколебания в системе с частотно-импульсной модуляцией

В настоящем параграфе рассматривается одноконтурная автономная система, описываемая уравнениями

$$y = W(p)z, \quad z = U_d(y), \quad (9.1)$$

где $U_d(y)$ — характеристика частотно-импульсного модулятора (ЧИМ). Устройства, осуществляющие частотно-импульсную модуляцию, весьма разнообразны [44, 45]. Ниже будет рассмотрена система с ЧИМ I рода, для которых связь между входной и выходной координатами дается уравнениями

$$z = \begin{cases} k_p & \text{при } y(t_i) > \Delta, \\ 0 & \text{при } |y(t_i)| < \Delta, \\ -k_p & \text{при } y(t_i) < -\Delta. \end{cases} \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (9.2)$$

При этом входной сигнал ЧИМ $y(t)$ предполагается непрерывным. Моменты переключения t_i в зависимости от типа модуляции могут определяться различными уравнениями.

При ЧИМ I рода [44]

$$t_n = t_{n-1} + f[y(t_{n-1})], \quad (9.3)$$

где $f(y)$ — некоторая положительная четная функция своего аргумента, такая, что $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 0$.

Будем искать простейший симметричный автоколебательный режим системы (1)–(3) с одним переключением за половину периода. В силу автономности системы полагаем $t_0 = 0$; при этом, аналогично (8.3), можно считать, что

$$z_n(t) = -z_n(t+T), \quad z_n(t) = \begin{cases} k_p, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T. \end{cases} \quad (9.4)$$

Поэтому симметричный периодический режим на выходе линейной части определяется формулой

$$y_n(t) = k_p \int_0^{t_1} \psi(2T, t - \tau) d\tau. \quad (9.5)$$

Используя соотношение (5) и условия переключения (3), легко получить соответствующие уравнения периодов. Действительно, из (3), полагая $n = 0, 1$ и учитывая, что $t_0 = 0$, получим

$$t_1 = f[y_n(0)], \quad T = f[y_n(t_1)] + t_1, \quad (9.6)$$

где

$$y_n(0) = k_p \int_0^{t_1} \psi(2T, -\tau) d\tau, \quad y_n(t_1) = k_p \int_0^{t_1} \psi(2T, t_1 - \tau) d\tau. \quad (9.7)$$

Соотношения (6) и представляют собой интересующие нас уравнения периодов для системы с ЧИМ I рода. Пусть T, t_1 — некоторое решение уравнений (6). Тогда автоколебательный режим действительно существует, если при найденных T, t_1 выполняется ряд дополнительных условий:

$$1. \quad y_n(0) > \Delta, \quad |y_n(t_1)| < \Delta.$$

2. При заданном T величина t_1 — наименьшая из удовлетворяющих уравнениям (6).

Перейдем теперь к составлению уравнений в вариациях, определяющих устойчивость автоколебательных режимов. Для этого необходимо найти варьированное уравнение ЧИМ:

$$z_1 = \frac{D}{\partial \alpha} U_d [y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}. \quad (9.8)$$

В соответствии с (3.40) получаем, что уравнения в вариациях для данной задачи представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= W(p) z_1(t), \\ z_1(t) &= -k_p \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \delta(t - sT) \frac{dt_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} - \\ &\quad - k_p \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s+1} \delta(t - t_1 - sT) \frac{dt'_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

где моменты переключения t_s и t'_s определяются условиями переключения. В случае (3) имеем

$$\left. \begin{aligned} t'_s(\alpha) &= t_s(\alpha) + f[y_n(t_s) + \alpha y_1(t_s, \alpha)], \\ t_{s+1}(\alpha) &= t'_s(\alpha) + f[y_n(t'_s) + \alpha y_1(t'_s, \alpha)], \\ t_s(0) &= sT, \quad t'_s(0) = t_1 + sT. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Предположим теперь, что функция $y(t)$ имеет непрерывную производную в моменты t_s и t'_s и функция f непрерывно дифференцируема. Тогда, дифференцируя (10) по α , найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt'_s}{d\alpha} &= \frac{dt_s}{d\alpha} + \frac{d}{d\alpha} f[y_n(t_s(\alpha)) + \alpha y_1(t_s(\alpha), \alpha)], \\ \frac{dt_{s+1}}{d\alpha} &= \frac{dt'_s}{d\alpha} + \frac{d}{d\alpha} f[y_n(t'_s(\alpha)) + \alpha y_1(t'_s(\alpha), \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ и учитывая периодичность и симметрию изучаемого режима, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt'_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \xi_1 \frac{dt_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + (-1)^s \eta_1 y_1(sT), \\ \frac{dt_{s+1}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \xi_2 \frac{dt'_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + (-1)^s \eta_2 y_1(t_1 + sT), \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{df}{dy} [y = y_n(0)] \frac{dy_n}{dt} (t=0) + 1, \\ \eta_1 &= \frac{df}{dy} [y = y_n(0)], \\ \xi_2 &= \frac{df}{dy} [y = y_n(t_1)] \frac{dy_n}{dt} (t=t_1) + 1, \\ \eta_2 &= \frac{df}{dy} [y = y_n(t_1)], \\ y_1(t) &= y_1(t, 0). \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Уравнения (9) и (12) представляют собой в совокупности уравнения в вариациях. В отличие от задач, рассмотренных выше, здесь производные $\frac{dt_s}{d\alpha}$ и $\frac{dt'_s}{d\alpha}$

не определяются явно, а даются рекуррентными соотношениями (12). Однако это не мешает построению уравнения для определения характеристических показателей с помощью приемов, изложенных выше.

Положим в (9) и (12), как и ранее,

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda t} y_{1n}(t), & y_{1n}(t) &= y_1(t+T), \\ z_1(t) &= e^{\lambda t} z_{1n}(t), & z_{1n}(t) &= z_1(t+T) \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \mu_s &= \frac{dt_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = (-1)^s e^{\lambda s T} c, \\ \nu_s &= \frac{dt'_s}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = (-1)^s e^{\lambda(t_1+sT)} d, \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

где c, d — неизвестные постоянные. Тогда из (15) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \delta(t-sT) \mu_s &= \\ &= e^{\lambda t} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t-sT) c = e^{\lambda t} \delta_T(t) c, \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s+1} \delta(t-t_1-sT) \nu_s &= \\ &= -e^{\lambda t} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1-sT) d = -e^{\lambda t} \delta_T(t-t_1) d, \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

и уравнения (9) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} y_{1n}(t) &= W(p+\lambda) z_{1n}(t), \\ z_{1n}(t) &= -k_p \delta_T(t) c + k_p \delta_T(t-t_1) d. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Рассматривая z_{1n} как внешнее возбуждение, находим

$$y_{1n}(t) = -k_p \varphi(T, \lambda, t) c + k_p \varphi(T, \lambda, t-t_1) d \quad (9.18)$$

и, следовательно, с учетом (14)

$$y_1(t) = -k_p e^{\lambda t} \varphi(T, \lambda, t) c + k_p e^{\lambda t} \varphi(T, \lambda, t-t_1) d. \quad (9.19)$$

Подставляя это решение, а также соотношения (15) в рекуррентные формулы (12), находим

$$\begin{aligned} (-1)^s e^{\lambda(t_1+sT)} d &= (-1)^s \xi_1 e^{\lambda sT} c + \\ &+ (-1)^s \eta_1 k_p [-e^{\lambda sT} \varphi(T, \lambda, 0) c + e^{\lambda sT} \varphi(T, \lambda, -t_1) d], \\ (-1)^{s+1} e^{\lambda(s+1)T} c &= (-1)^s \xi_2 e^{\lambda(t_1+sT)} d + \\ &+ (-1)^s \eta_2 k_p [-e^{\lambda(t_1+sT)} \varphi(T, \lambda, t_1) c + e^{\lambda(t_1+sT)} \varphi(T, \lambda, 0) d]. \end{aligned}$$

После сокращения получаем однородную систему уравнений относительно постоянных c и d :

$$\begin{aligned} [\xi_1 - \eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, 0)] c + [\eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, -t_1) - e^{\lambda t_1}] d &= 0, \\ [e^{\lambda(T-t_1)} - \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, t_1)] c + [\xi_2 + \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, 0)] d &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, приходим к характеристическому уравнению

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 - \eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, 0) & \eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, -t_1) - e^{\lambda t_1} \\ e^{\lambda(T-t_1)} - \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, t_1) & \xi_2 + \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, 0) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.20)$$

Для практических вычислений это уравнение удобно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} &[\xi_1 - \eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, 0)] [\xi_2 + \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, 0)] - \\ &- [\eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, -t_1) e^{-\lambda t_1} - 1] [e^{\lambda T} - \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, t) e^{\lambda t_1}] = 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Если заметить, что в соответствии с (IV.6.15)

$$\varphi(T, \lambda, t) e^{\lambda t} = \mathfrak{D}[W(\lambda), t], \quad (9.22)$$

то характеристическое уравнение выразится через $\mathfrak{D}$ -преобразование передаточной функции:

$$\begin{aligned} &[\xi_1 - \eta_1 k_p \mathfrak{D}[W(\lambda), 0]] [\xi_2 + \eta_2 k_p \mathfrak{D}[W(\lambda), 0]] - \\ &- [\eta_1 k_p \mathfrak{D}[W(\lambda), -t_1] - 1] [e^{\lambda T} - \eta_2 k_p \mathfrak{D}[W(\lambda), t_1]] = 0 \end{aligned} \quad (9.23)$$

Из (23) следует, с учетом (22), что левая часть характеристического уравнения является функцией величины $z = e^{\lambda T}$ и, следовательно, левая часть характеристического уравнения периодична по λ с периодом $i\omega$.

Характеристическое уравнение (23) получено в предположении о непрерывности производной $\dot{y}(t)$. Как уже указывалось, это будет, например, иметь место, если передаточная функция $W(p)$ дробно-рациональная, причем степень знаменателя превышает степень числителя больше чем на единицу. Если же разность степеней числителя и знаменателя равна единице, то производная $\dot{y}(t)$ терпит разрывы в моменты переключения, оставаясь ограниченной. Найдем характеристическое уравнение для такого случая.

Предполагая, что выполнены условия (3.48):

$$y^+(t_i, \alpha) = y^-(t_i, \alpha),$$

где, как и ранее «—», «+» означают «до» и «после» переключения, вместо (12) легко получить соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt'_k}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \xi_1^\pm \frac{dt_k}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + (-1)^k \eta_1 y_1(kT) = q_k^\pm, \\ \frac{dt_{k+1}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \xi_2^\pm \frac{dt'_k}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + (-1)^k \eta_2 y_1(t_1 + kT) = p_k^\pm, \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^\pm &= \frac{df}{dy} \Big|_{y=y_{\Pi}(0)} \frac{dy}{dt} \Big|_{t=\pm 0} + 1, & \eta_1 &= \frac{df}{dy} \Big|_{y=y_{\Pi}(0)}, \\ \xi_2^\pm &= \frac{df}{dy} \Big|_{y=y_{\Pi}(0)} \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_1 \pm 0} + 1, & \eta_2 &= \frac{df}{dy} \Big|_{y=y_{\Pi}(t_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Кроме того, вместо второго уравнения (9) имеем два эквивалентных соотношения:

$$\begin{aligned} z_1(t) = & -k_p \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \delta(t-sT) p_s^\pm + \\ & + k_p \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \delta(t-t_1-sT) q_s^\pm. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Далее для конкретности, воспользуемся уравнениями (9) и (25), соответствующими индексу «—». Тогда, полагая, кроме (14),

$$p_s^- = (-1)^s e^{\lambda s T} c, \quad q_s^- = (-1)^s e^{\lambda(sT+t_1)} d$$

и повторяя рассуждения, использованные при выводе уравнений (20), получим характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1^- - \eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, -0) & \eta_1 k_p \varphi(T, \lambda, -t_1 - 0) - e^{\lambda t_1} \\ e^{\lambda(T-t_1)} - \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, t_1 - 0) & \xi_2^- + \eta_2 k_p \varphi(T, \lambda, -0) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.27)$$

§ 10. Периодические режимы в нелинейных амплитудно-импульсных системах

В этом параграфе рассматриваются собственные периодические колебания систем, содержащих кроме линейных периодических и амплитудно-импульсных элементов безынерционные нелинейные преобразователи.

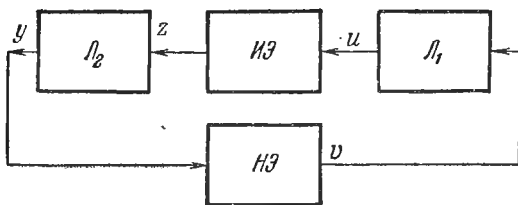


Рис. 50.

Для конкретности мы остановимся на системе, структурная схема которой изображена на рис. 50, хотя излагаемый подход справедлив в гораздо более общих случаях.

На рис. 50 ИЭ — произвольный безынерционный непрерывный нелинейный элемент, ИЭ — амплитудно-импульсный элемент с периодом повторения T , имеющий передаточную функцию вида (IV.1.7), $Л_1, Л_2$ — произвольные стационарные элементы такие, что вход АИ-элемента имеет непрерывную производную при $t = kT$, а вход нелинейной функции кусочно-непрерывен.

Уравнения изучаемой системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y &= W_2(p) z, \quad z = W_a(p, t) u, \quad u = W_1(p) v, \\ v &= f(y), \quad W_a(p, t) = W_a(p, t + T). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Система (1) является неавтономной, и в ней могут в некоторых случаях при отсутствии внешнего

возбуждения $x(t)$ возникать свободные периодические колебания с периодом

$$T_c = \frac{n}{s} T, \quad (10.2)$$

где s и n — произвольные целые числа. Для простоты изложения далее ограничимся случаем $s = 1$, т. е. будем рассматривать колебания с периодом, равным или кратным периоду повторения АИ-элемента.

Предположим, что в системе (1) существует периодический режим периода

$$T_c = nT = T_n. \quad (10.3)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= y_n(t + nT), & z_n(t) &= z_n(t + nT), \\ u_n(t) &= u_n(t + nT), & v_n(t) &= v_n(t + nT). \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Предполагая линейные элементы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ нерезонансными, введем в рассмотрение соответствующие ИЧХ

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(T_n, t) &= \frac{1}{T_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_s(ki\omega_n) e^{ki\omega_n t}, \\ \omega_n &= \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{nT}, \quad (s = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Тогда, прежде всего, имеем

$$u_n(t) = \int_0^{T_n} \varphi_1(T_n, t - \tau) v(\tau) d\tau. \quad (10.6)$$

Импульсный элемент в данном случае следует рассматривать как имеющий период T_n (см. § 1 гл. IV). Поэтому, если рассмотреть функцию (IV. 1.47):

$$m_1(t) = m_1(t + nT), \quad m_1(t) = \begin{cases} m(t), & 0 < t < T, \\ 0, & T < t < nT, \end{cases} \quad (10.7)$$

то координата $z_n(t)$, представляющая собой выход импульсного элемента, может быть представлена в виде

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} m_1(t - kT) u_n(kT). \quad (10.8)$$

Следовательно, если обозначить

$$\tilde{y}(t) = \int_0^{T_n} \varphi_2(T_n, t - \tau) m_1(\tau) d\tau = \int_0^T \varphi_2(T_n, t - \tau) m(\tau) d\tau, \quad (10.9)$$

то координата $y_n(t)$ в периодическом режиме запишется формулой

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_n(kT) \tilde{y}(t - kT). \quad (10.10)$$

При этом вид функции $\tilde{y}(t)$ вообще не зависит от вида нелинейной функции и передаточной функции $W_1(p)$.

Если теперь использовать соотношение (6) и характеристику нелинейного элемента, то получим

$$u_n(t) = \int_0^{T_n} \varphi_1(T_n, t - \tau) f \left[\sum_{k=0}^{n-1} u(kT) \tilde{y}(\tau - kT) \right] d\tau. \quad (10.11)$$

Полагая здесь $t = kT$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, получим систему уравнений относительно неизвестных $u_k = u(kT)$:

$$u_k = \int_0^{T_n} \varphi_1(T_n, kT - \tau) f \left[\sum_{s=0}^{n-1} u_s \tilde{y}(\tau - sT) \right] d\tau \quad (10.12)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Уравнения (12) существенно упрощаются, если $W_1(p) = 1$. В этом случае уравнения (12) принимают вид

$$u_k = f \left[\sum_{s=0}^{n-1} u_s \tilde{y}((k-s)T) \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (10.13)$$

Мы не будем останавливаться на возможных способах решения уравнений (12) и (13), так как для этого можно применять многочисленные способы решения уравнений, описываемые в литературе. Отметим только, что при $n = 1$, т. е. $k = 0$, система (13) допускает чрезвычайно простое решение. Действительно, в этом случае из (13) имеем

$$u_0 = f[u_0 \tilde{y}(0)], \quad (10.14)$$

где $\tilde{y}(0)$ — известное число. Полагая $u_0 \tilde{y}(0) = z_0$, откуда получим

$$\frac{z_0}{\tilde{y}(0)} = f(z_0). \quad (10.15)$$

Поэтому величина z_0 может быть найдена графически как точка пересечения кривой $y = f(z_0)$ с прямой $y = \frac{z_0}{\tilde{y}(0)}$ (рис. 51).

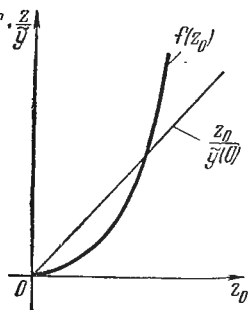


Рис. 51.

Отметим также, что в общем случае, если удалось найти решение уравнений (12) или (13), то ему фактически будет соответствовать периодический режим, только если выполнен ряд дополнительных условий, о которых говорилось в § 3 настоящей главы [105, 106]. Существенного упрощения изложенной методики можно достичь, если ограничить-

ся разысканием симметричных периодических колебаний, меняющих знак через половину периода, т. е.

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= -y_{\Pi}\left(t + \frac{T_n}{2}\right), & z_{\Pi}(t) &= -z_{\Pi}\left(t + \frac{T_n}{2}\right), \\ u_{\Pi}(t) &= -u_{\Pi}\left(t + \frac{T_n}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Пусть

$$n = 2q; \quad (10.17)$$

при этом в силу сделанных предположений

$$u_k = u(kT), \quad u(kT + qT) = -u_k.$$

Поэтому, если ввести соответствующие ИЧХ II рода (§ 3 гл. II)

$$\left. \begin{aligned} \psi_s(T_n, t) &= \frac{2}{T_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega_n] e^{(2k+1)i\omega_n t}, \\ \omega_n &= \frac{2\pi}{nT} \quad (s=1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

то, повторяя дословно соображения, приводящие к уравнениям (11), получим систему уравнений, содержащую

вдвое меньшее число неизвестных:

$$u_k = \int_0^{T_n/2} \psi_1(T_n, t - \tau) f \left[\sum_{s=0}^{q-1} u_s \tilde{y}(\tau - sT) \right] d\tau, \quad (10.19)$$

где

$$\tilde{y}(t) = \int_0^T \psi_2(T_n, t - \tau) m(\tau) d\tau. \quad (10.20)$$

Если, в частности, $W_1(p) = 1$, то из (9), аналогично (13), получится

$$u_k = f \left[\sum_{s=0}^{q-1} u_s \tilde{y}(k - s) T \right] \quad (k = 0, 1, \dots, q - 1); \quad (10.21)$$

при этом, если $q = 1$, то мы снова придем к элементарно разрешимому уравнению вида (14).

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденных периодических решений. Для этого сначала составим систему уравнений в вариациях, для чего используем способ, изложенный в § 3 настоящей главы. В соответствии с (3.9) полагаем

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha), & z(t) &= z_n(t) + \alpha z_1(t, \alpha), \\ u(t) &= u_n(t) + \alpha u_1(t, \alpha), & v(t) &= v_n(t) + \alpha v_1(t, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

где величины с индексом «п» соответствуют найденному периодическому режиму. Для того чтобы получить уравнения в вариациях, следует продифференцировать уравнения

$$\begin{aligned} y_1(t, \alpha) &= W_2(p) z_1(t, \alpha), & z_1(t, \alpha) &= W_a(p, t) u_1(t, \alpha), \\ u_1(t, \alpha) &= W_1(p) v_1(t, \alpha), & v_n(t) + \alpha v_1(t, \alpha) &= \\ & & &= f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)] \end{aligned}$$

обобщенно по α и затем положить $\alpha = 0$.

Если $f(y)$ — непрерывная функция, то получаемые таким образом уравнения в вариациях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= W_2(p) z_1(t), & z_1(t) &= W_a(p, t) u_1(t), \\ u_1(t) &= W_1(p) v_1(t), & v_1(t) &= a(t) y_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y_1(t, 0), & z_1(t) &= z_1(t, 0), \\ u_1(t) &= u_1(t, 0), & v_1(t) &= v_1(t, 0) \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

и, кроме того,

$$a(t) = \frac{df}{dy} [y = y_n(t)]. \quad (10.25)$$

Уравнения (24) соответствуют одноконтурной импульсной системе типа, рассмотренного в § 4 гл. IV. Найдем характеристические показатели системы (23) как такие значения λ , при которых уравнения (23) имеют решения вида

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda t} y_{1n}(t), & z_1(t) &= e^{\lambda t} z_{1n}(t), \\ u_1(t) &= e^{\lambda t} u_{1n}(t), & v_1(t) &= e^{\lambda t} v_{1n}(t), \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

где все величины с индексом «п» имеют по t период nT . Используя (23), а также формулу (IV.1.53), получаем

$$z_1(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} W_{an}(\lambda, t - kT) u_{1n}(kT),$$

т. е.

$$z_{1n}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} W_{an}(\lambda, t - kT) u_{1n}(kT). \quad (10.27)$$

Из (27), используя остальные уравнения (23), а также общие формулы гл. II, находим

$$\begin{aligned} u_{1n}(t) &= \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi_p(T_n, \lambda, t, t - \tau) W_{an}(\lambda, \tau - kT) d\tau u_{1n}(kT), \end{aligned} \quad (10.28)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_p(T_n, \lambda, t, t - \tau) &= \\ &= \int_0^{T_n} \varphi_1(T_n, \lambda, t - q) a(q) \varphi_2(T_n, \lambda, q - \tau) dq. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Полагая в (28) $t = sT$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$), получим

$$u_{1n}(sT) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{sk} u_{1n}(kT), \quad (10.30)$$

где коэффициенты $\chi_{sk}(\lambda)$ с учетом (28) и (IV.1.48) равны

$$\chi_{sk}(\lambda) = \int_0^T \varphi_p(T_n, \lambda, sT, (s-k)T - \tau) W_{an}(\lambda, \tau) d\tau. \quad (10.31)$$

Приравнивая нулю определитель системы (31), находим искомое характеристическое уравнение:

$$\det |\delta_{sk} - \chi_{sk}(\lambda)| = 0, \quad \delta_{sk} = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ 1, & s = k \end{cases} \quad (10.32)$$

$$(k, s = 0, 1, \dots, n-1).$$

В частности, при $W_1(p) = 1$ коэффициенты $\chi_{sk}(\lambda)$ вычисляются по формулам (31), где

$$\varphi_p(T, \lambda, t, t - \tau) = a(t) \varphi_2(T_n, \lambda, t - \tau). \quad (10.33)$$

Если найденный периодический режим обладает симметрией, то характеристическое уравнение (32) может быть упрощено. Пусть имеет место условие (17), причем нелинейная функция нечетна, т. е. $f(y) = -f(-y)$. В этом случае функция $\frac{df}{dy}$ — четная, и, следовательно, в силу того, что выполнены условия (16), функция $a(t)$ имеет период $\frac{T_n}{2} = qT = Tq$. Поэтому и систему уравнений (23) можно рассматривать как имеющую период qT . Поэтому, поступая так же, как и при выводе уравнений (32), получим характеристическое уравнение для симметричных колебаний:

$$\det |\delta_{sk} - \bar{\chi}_{sk}(\lambda)| = 0 \quad (k, s = 0, 1, \dots, q-1), \quad (10.34)$$

где

$$\bar{\chi}_{sk}(\lambda) = \int_0^T \varphi_p(T_q, \lambda, sT, (s-k)T - \tau) W_{sq}(\lambda, \tau) d\tau. \quad (10.35)$$

В тех случаях, когда СИЧХ φ_1 и φ_2 записываются в конечной форме, уравнения (32), (35) также могут быть представлены в конечной форме. Необходимым условием устойчивости изучаемых периодических режимов является

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad (10.36)$$

где λ_k — корни характеристического уравнения. Если передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ дробно-рациональные, то выполнение условий (36) является и достаточным для устойчивости периодического режима.

Излагаемая методика исследования устойчивости немного изменится, если функция $f(y)$ является разрывной.

В этом случае последнее из уравнений (23) запишется, в соответствии с (3.21), в виде

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{Df}{d\alpha} f[y_{\pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]_{\alpha=0} = \\ &= \frac{df}{dy} [y = y_{\pi}(t)] - \sum_i \Delta f_i \delta(t - t_i) \frac{dt_i}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned}$$

где $t_i(\alpha)$ — моменты переключения этой разрывной функции, определяемые соответствующими условиями переключения. При этом уравнения в вариациях будут соответствовать некоторой импульсной системе, содержащей кроме исходного импульсного элемента дополнительные импульсные элементы, вырабатывающие идеальные мгновенные импульсы, обусловленные разрывностью функции $f(y)$.

§ 11. Периодические колебания в системах с широтно-импульсными элементами

Простейший широтно-импульсный элемент с одним входом u и одним выходом z описывается уравнениями (1.14):

$$z(t) = \begin{cases} k_p \operatorname{sign} u(nT), & nT < t < nT + t_{in}, \\ 0, & nT + t_{in} < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (11.1)$$

где

$$0 < t_{in} = \gamma[u(nT)] \leq T, \quad (11.2)$$

причем $\gamma(x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq \gamma(u) \leq T, \quad \gamma(u) = \gamma(-u), \quad \gamma(u) = T \quad (11.3) \\ \text{при } |u| \geq u_m; \end{aligned}$$

возможный вид функции $\gamma(u)$ изображен на рис. 52.

Будем рассматривать систему, структурная схема которой изображена на рис. 50. При этом элементы L_1 , L_2 , $НЭ$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе, а $ИЭ$ будет означать широтно-импульсный элемент рассматриваемого типа.

В отличие от амплитудно-импульсных систем, системы с широтной модуляцией являются релейно-импульсными, так как в них имеют место как переключения, навязанные импульсным элементом и происходящие в моменты $t = nT$, так и переключения релейного типа, происходящие в моменты $t = t_{1n}$, зависящие от свойств входного сигнала $u(t)$.

Система, содержащая широтно-импульсный элемент (1), является неавтономной. В настоящем параграфе

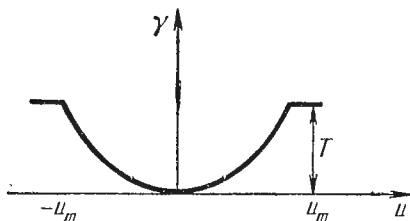


Рис. 52.

рассматривается задача исследования симметричных периодических колебаний этой системы, имеющих период $2qT$, где q — целое число. Более сложные типы периодических режимов также могут быть изучены с помощью предлагаемого подхода. Для того чтобы гипотеза существования симметричного периодического режима имела смысл, будем предполагать, что характеристика нелинейного элемента также является симметричной. Допустим, что в системе, изображенной на рис. 50, установился периодический режим

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= z_{\pi}(t) = z_{\pi}(t + 2qT), \\ u(t) &= u_{\pi}(t) = u_{\pi}(t + 2qT) \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

такой, что

$$\left. \begin{aligned} z_{\pi}(t) &= -z_{\pi}(t + qT), \\ u_{\pi}(t) &= -u_{\pi}(t + qT). \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

В этом случае выходная величина импульсного элемента $z_{\pi}(t)$ представляет собой при $0 < t < qT$ совокупность из q прямоугольных импульсов, каждый из которых имеет высоту $k_p \operatorname{sign} u(sT)$, $s = 0, 1, \dots, q-1$, и

длительность t_{1s} , $0 < t_{1s} \leq T$, $t_{1s} = \gamma[u(sT)]$. На рис. 53 изображена возможная последовательность импульсов при $q = 2$.

Если хотя бы для одного s имеем $t_{1s} = T$, то соответствующий периодический режим называется *насыщенным*.

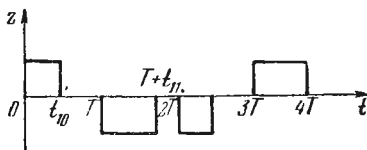


Рис. 53.

Учитывая периодичность и симметрию функции $z_n(t)$, можно найти функцию $y(t)$ в периодическом режиме:

$$y(t) = y_n(t) = k_p \sum_{s=0}^{q-1} \text{sign } u(sT) v_s(t), \quad (11.6)$$

где

$$v_s(t) = \int_{sT}^{sT+t_{1s}} \psi_2(2qT, t - \tau) d\tau, \quad (11.7)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \psi_2(2qT, t) &= \frac{1}{qT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2[(2k+1)i\omega_q] e^{(2k+1)i\omega_q t}, \\ \omega_q &= \frac{\pi}{qT}. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Имея выражения (6) и (7), можно найти выражение для координаты $u_n(t)$ в виде

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \int_0^{qT} \psi_1(2qT, t - \tau) \times \\ &\times f \left[k_p \sum_{s=0}^{q-1} \text{sign } u(sT) v_s(\tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (11.9)$$

где функция $\psi_1(2qT, t)$ строится аналогично (8). Подставляя сюда $t = kT$ ($k = 0, 1, \dots, q-1$) и обозначая $u_{\Pi}(kT) = u_k$, получим

$$u_k = \int_0^{qT} \psi_1(2qT, kT - \tau) f \left[k_p \sum_{s=0}^{q-1} \text{sign } u_s v_s(\tau) \right] d\tau. \quad (11.10)$$

Если учесть, что функции $v_s(t)$ через t_{1s} известным образом зависят от u_s , то придем к выводу, что соотношения (10) представляют собой трансцендентную систему уравнений относительно неизвестных u_s . При этом, если система чисел u_s ($s = 0, 1, \dots, q-1$) является решением уравнений (10), то ей фактически будет соответствовать ненасыщенный периодический режим, если

$$t_{1s}(u_s) < T. \quad (11.11)$$

В соответствии с (3) эти условия равносильны следующим:

$$|u_s| < u_m. \quad (11.12)$$

Кроме того, должны отсутствовать дополнительные переключения.

Для простейшего симметричного периодического режима, соответствующего $q = 1$, имеем всего одно уравнение

$$u_0 = \int_0^T \psi_1(2T, -\tau) f[k_p \text{sign } u_0 v_0(\tau)] d\tau, \quad (11.13)$$

где

$$v_0(t) = \int_0^{t_{10}} \psi_2(2T, t - \tau) d\tau. \quad (11.14)$$

В этом случае, учитывая симметрию нелинейной функции и четность функции $\gamma(u)$, можно без ограничения общности положить $\text{sign } u_0 = 1$ и рассматривать уравнение

$$u_0 = \int_0^T \psi_1(2T, t - \tau) f[k_p v_0(\tau)] d\tau, \quad (11.15)$$

так как второй случай приведет к такому же решению, но сдвинутому по фазе на величину T . После

интегрирования интеграл в правой части (15) станет простой функцией u_0 и, следовательно, уравнение (15) примет вид

$$u_0 = F(u_0). \quad (11.16)$$

Уравнение (16) допускает простое графическое решение.

Уравнения (10) и (13) существенно упрощаются, если $W_1(p) = 1$. Тогда вместо (10) и (13) соответственно имеем

$$u_k = f \left[k_p \sum_{q=0}^{q-1} \text{sign } u_s v_s(kT) \right] \quad (11.17)$$

и

$$u_0 = f[k_p v_0(0)]. \quad (11.18)$$

Если $q = 2$, то из (10) имеем систему из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \int_0^{2T} \psi_1(4T, -\tau) f[k_p \text{sign } u_0 v_0(\tau) + \\ &\quad + k_p \text{sign } u_1 v_1(\tau)] d\tau, \\ u_1 &= \int_0^{2T} \psi_1(4T, T - \tau) f[k_p \text{sign } u_0 v_0(\tau) + \\ &\quad + k_p \text{sign } u_1 v_1(\tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

На первый взгляд кажется, что фактически (19) представляет собой четыре системы уравнений, получающихся при различных комбинациях знаков u_0 и u_1 . На самом деле это не так. Из рис. 53 следует, что при $q = 2$ начало отсчета времени всегда можно выбрать так, что обе величины u_0 и u_1 будут положительны. Поэтому, не ограничивая общности, в уравнениях (19) можно считать, что

$$\text{sign } u_0 = \text{sign } u_1 = 1. \quad (11.20)$$

Поэтому уравнения (19) упростятся и примут вид

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \int_0^{2T} \psi_1(4T, -\tau) f[k_p v_0(\tau) + k_p v_1(\tau)] d\tau, \\ u_1 &= \int_0^{2T} \psi_1(4T, T - \tau) f[k_p v_0(\tau) + k_p v_1(\tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

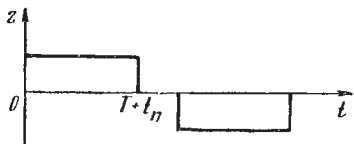
В случае $W_1(p) = 1$ имеем

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= f[k_p v_0(0) + k_p v_1(0)], \\ u_1 &= f[k_p v_0(T) + k_p v_1(T)]. \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

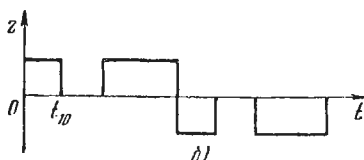
Следует отметить, что и в общем случае уравнений (10) можно отбросить те комбинации знаков u_s , которые соответствуют фазовому сдвигу некоторого исходного решения на величину, кратную T .

Сказанное относилось к периодическим режимам без насыщения. Анализ насыщенных режимов может быть также произведен на основе уравнений (10), если положить для некоторых s

$$t_{1s} = T. \quad (11.23)$$



a)



б)

Рис. 54.

В этом случае число неизвестных в уравнениях (10) уменьшается.

Рассмотрим подробнее этот вопрос для $q = 1$ и $q = 2$. Пусть сначала $q = 1$; тогда правая часть (15) вообще от u_0 не зависит, так как

$$u_0 = \int_0^T \psi_1(2T, -\tau) f \left[k_p \int_0^T \psi_2(2T, \tau - q) dq \right] d\tau; \quad (11.24)$$

при этом должно быть

$$u_0 \geq u_m. \quad (11.25)$$

Выражение (24) дает значение координаты u_0 в насыщенном симметричном периодическом режиме при $q = 1$ (если такой режим существует). При $q = 2$ возможны, во-первых, два существенно различных частично насыщенных режима, для которых либо

$$t_{10} = T, \quad t_{11} < T, \quad (11.26)$$

$$\text{либо} \quad t_{10} < T, \quad t_{11} = T. \quad (11.27)$$

Вид выходного сигнала импульсного элемента $z_n(t)$ в случаях (26) и (27) изображен на рис. 54, а и б.

Для режима (26) система уравнений (21) сводится к одному:

$$u_1 = \int_0^{2T} \psi_1(4T, t - \tau) f \left[k_p \int_0^T \psi_2(4T, \tau - q) dq + \right. \\ \left. + k_p v_1(\tau) \right] d\tau; \quad (11.28)$$

при этом при известном u_1 u_0 определится однозначно из первого уравнения (21).

При этом должны выполняться условия переключения

$$|u_1| \geq u_m, \quad |u_2| < u_m. \quad (11.29)$$

Совершенно аналогично в случае (27) имеем из (21) одно уравнение:

$$u_0 = \int_0^{2T} \psi_1(4T, t - \tau) f \left[k_p v_0(\tau) + \right. \\ \left. + k_p \int_T^{2T} \psi_2(4T, \tau - q) dq \right] d\tau, \quad (11.30)$$

а второе уравнение сразу дает величину u , причем

$$|u_0| < u_m, \quad |u_1| \geq u_m. \quad (11.31)$$

Кроме частично насыщенных периодических режимов при $q = 2$ возможны полностью насыщенные колебания, когда

$$t_{10} = T, \quad t_{11} = T. \quad (11.32)$$

В случае (32) никаких уравнений решать не надо, так как из (21) получается

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \int_0^{2T} \psi_1(4T, -\tau) f \left[k_p \int_0^{2T} \psi_2(4T, \tau - q) dq \right] d\tau, \\ u_1 &= \int_0^{2T} \psi_1(4T, T - \tau) f \left[k_p \int_0^{2T} \psi_2(4T, \tau - q) dq \right] d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

и условием существования периодического режима будет

$$|u_0| \geq u_m, \quad |u_1| \geq u_m. \quad (11.34)$$

Перейдем теперь к исследованию устойчивости рассмотренных периодических режимов. Для этого составим соответствующие уравнения в вариациях. Полагаем, как и в § 10,

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha), & z(t) &= z_n(t) + \alpha z_1(t, \alpha), \\ u(t) &= u_n(t) + \alpha u_1(t, \alpha), & v(t) &= v_n(t) + \alpha v_1(t, \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

Тогда уравнения линейных звеньев примут вид

$$y_1(t) = W_2(p) z_1(t), \quad u_1(t) = W_1(p) v_1(t), \quad (11.36)$$

где использованы обозначения (10.24).

Нелинейную характеристику будем полагать непрерывной. В этом случае варьированное уравнение нелинейного элемента будет аналогично (10.25):

$$v_1(t) = a(t) y_1(t), \quad a(t) = a(t + qT). \quad (11.37)$$

Найдем теперь варьированное уравнение импульсного элемента. Для этого, в соответствии со сказанным в § 3 настоящей главы, следует в уравнении импульсного элемента положить

$$z(t, \alpha) = z_n(t) + \alpha z_1(t, \alpha) = U_d[u_n(t) + \alpha u_1(t, \alpha)], \quad (11.38)$$

считая, что функции z_n и u_n от α не зависят, и найти обобщенную производную $\frac{Dz(t, \alpha)}{D\alpha}$. После этого положим в соотношении

$$\frac{D}{D\alpha} [z_1(t, \alpha)] = \frac{D}{D\alpha} U_d[u_n(t) + \alpha u_1(t, \alpha)] \quad (11.39)$$

$\alpha = 0$, и уравнение варьированного элемента примет вид

$$z_1(t) = \frac{D}{D\alpha} U_d[u_n(t) + \alpha u_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}. \quad (11.40)$$

Предположим сначала, что $u_n(t)$ — ненасыщенный периодический режим. Тогда при малых α

$$z(t, \alpha) = \begin{cases} k_p \operatorname{sign} u(nT, \alpha), & nT < t < nT + t_{1n}(\alpha), \\ 0, & nT + t_{1n}(\alpha) < t < (n+1)T. \end{cases} \quad (11.41)$$

Функция $z(t, \alpha)$ является разрывной в моменты

$$t_n = nT, \quad t'_n = nT + t_{1n}(\alpha), \quad (11.42)$$

где

$$t_{1n}(\alpha) = \gamma [u_n(t_n) + \alpha u_1(t_n, \alpha)]. \quad (11.43)$$

Моменты переключения t_n от параметра α не зависят. Поэтому, учитывая формулу обобщенного дифференцирования разрывной функции по параметру (I.4.32), имеем

$$\frac{Dz(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial z(t, \alpha)}{\partial \alpha} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t'_n) \Delta z'_n \frac{dt'_n}{d\alpha}, \quad (11.44)$$

где $\Delta z'_n$ — разрывы функции $z(t, \alpha)$ в моменты t'_n , равные

$$\Delta z'_n = -k_p \operatorname{sign} u(t_n, \alpha). \quad (11.45)$$

В данном случае для обыкновенной производной $\frac{\partial z(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ имеем, очевидно,

$$\frac{\partial z(t, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad (11.46)$$

так как величина выходного сигнала импульсного элемента от величины α не зависит. Поэтому с учетом (45) соотношение (44) принимает вид

$$\frac{Dz(t, \alpha)}{\partial \alpha} = k_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t'_n) \operatorname{sign} u(t_n) \frac{dt'_n}{d\alpha}. \quad (11.47)$$

Для того чтобы окончательно определить правую часть (47), необходимо вычислить производные $\frac{dt'_n}{d\alpha}$, для чего следует воспользоваться уравнением (43).

Так как в общем случае функция $u(t, \alpha)$ не является непрерывно дифференцируемой, то будем полагать, что

$$\left. \begin{aligned} u(t, \alpha) &= u^-(t, \alpha) = u_n(t) + \alpha u_1^-(t, \alpha), \\ &\quad t < t'_n \quad \text{или} \quad t < t_n, \\ u(t, \alpha) &= u^+(t, \alpha) = u_n(t) + \alpha u_1^+(t, \alpha), \\ &\quad t > t'_n \quad \text{или} \quad t > t_n, \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

где все функции с индексом «+» или «-» непрерывно дифференцируемы по t, α , и выполнение (48) предполагается в достаточно малой окрестности моментов t'_n и t_n .

При этом при $t = t'_n(\alpha)$ и $t = t_n$ имеем тождественно

$$\left. \begin{aligned} u_n(t'_n) + \alpha u_1^-(t'_n, \alpha) &= u_n(t'_n) + \alpha u_1^+(t'_n, \alpha), \\ u_n(t_n) + \alpha u_1^-(t_n, \alpha) &= u_n(t_n) + \alpha u_1^+(t_n, \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

С учетом (49) получаем, что уравнение (43) может быть записано в двух эквивалентных видах:

$$\begin{aligned} t_{1n}(\alpha) &= \gamma [u_n(t_n) + \alpha u_1^-(t_n, \alpha)] = \\ &= \gamma [u_n(t_n) + \alpha u_1^+(t_n, \alpha)]. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Рассматривая соотношения (50) как уравнения, определяющие функцию $t'_n(\alpha)$, и дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dt'_n}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \gamma [u_n(t_n) + \alpha u_1^-(t_n, \alpha)] = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \gamma [u_n(t_n) + \alpha u_1^+(t_n, \alpha)]. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Из (51) при $\alpha \rightarrow 0$ получаем

$$\left. \frac{dt'_n}{d\alpha} \right|_{(\alpha=0)} = \frac{d\gamma}{du} [u = u_n(t_n)] u_1^-(t_n) = \frac{d\gamma}{du} [u = u_n(t_n)] u_1^+(t_n),$$

откуда следует, что

$$u_1^-(t_n) = u_1^+(t_n),$$

т. е. функция $u_1(t)$ при $t = t_n = nT$ непрерывна, и имеем одно соотношение:

$$\left. \frac{dt'_n}{d\alpha} \right|_{(\alpha=0)} = \frac{d\gamma}{du} [u = u_n(nT)] u_1(nT). \quad (11.52)$$

Пусть теперь $u_n(t)$ — симметричный периодический режим периода $2qT$. Тогда, используя обозначение $u_n(kT) = u_k$ ($k = 0, 1, \dots, q-1$), из (52) получим

$$\left. \frac{dt'_n}{d\alpha} \right|_{(\alpha=0)} = (-1)^s \frac{d\gamma}{du} (u_k) u_1(nT) \quad \left. \vphantom{\frac{dt'_n}{d\alpha}} \right\} \quad (11.53)$$

$$\text{при } n = sq + k, \quad 0 \leq k \leq q-1,$$

где s — целое число.

Моменты t'_n при $\alpha \rightarrow 0$, очевидно, можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} t'_n(\alpha=0) &= t_{1k} + sT \\ \text{при } n &= sq + k, \quad 0 \leq k \leq q-1, \quad t_{1k} = \gamma(u_k). \end{aligned} \right\} \quad (11.54)$$

С учетом (53) и (54) при $\alpha \rightarrow 0$ варьированное уравнение широтно-импульсного элемента принимает вид

$$z_1(t) = k_p \sum_{k=0}^{q-1} \left| \frac{dy}{du}(u_k) \right| \delta_{qT}(t - kT - t_{1k}) u_1(t - t_{1k}), \quad (11.55)$$

где учтено, что

$$u_k = -u_{k+q}, \quad \frac{dy}{du}(u) = -\frac{dy}{du}(-u). \quad (11.56)$$

В результате мы приходим к следующим уравнениям в вариациях, получающимся из (36), (37) и (55):

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W_2(p) z_1, \\ z_1 &= k_p \sum_{k=0}^{q-1} \left| \frac{dy}{du}(u_k) \right| \delta_{qT}(t - kT - t_{1k}) u_1(t - t_{1k}), \\ u_1 &= W_1(p) v_1, \quad v_1 = a(t) y_1. \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

Составим характеристическое уравнение импульсной системы (57), имеющей период qT . Полагая

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda t} y_{1п}(t), \quad z_1 = e^{\lambda t} z_{1п}(t), \\ u_1 &= e^{\lambda t} u_{1п}(t), \quad v_1 = e^{\lambda t} v_{1п}(t), \end{aligned}$$

где функции с индексом «п» имеют период qT , из (57) получаем

$$\left. \begin{aligned} y_{1п} &= W_2(p + \lambda) z_{1п}, \\ z_{1п} &= k_p \sum_{k=0}^{q-1} \left| \frac{dy}{du}(u_k) \right| e^{-\lambda t_{1k}} \times \\ &\quad \times \delta_{qT}(t - kT - t_{1k}) u_{1п}(kT), \\ u_{1п} &= W_1(p + \lambda) v_{1п}, \quad v_{1п} = a(t) y_{1п}. \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

Рассматривая $z_{1п}$ как периодическое внешнее возбуждение, получаем

$$\begin{aligned} u_{1п}(t) &= \\ &= k_p \sum_{k=0}^{q-1} \left| \frac{dy}{du}(u_k) \right| e^{-\lambda t_{1k}} \Phi_p(qT, \lambda, t, t - kT - t_{1k}) u_{1п}(kT), \end{aligned} \quad (11.59)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_p(qT, \lambda, t, t - \tau) = \\ = \int_0^{qT} \varphi_1(qT, \lambda, t - \xi) a(\xi) \varphi_2(qT, \lambda, \xi - \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Из (59), полагая $t = kT$ ($k = 0, \dots, q - 1$), получим характеристическое уравнение

$$\det |\delta_{ik} - \kappa_{ik}(\lambda)| = 0 \quad (i, k = 0, 1, \dots, q - 1), \quad (11.61)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{ik}(\lambda) = \\ = k_p \left| \frac{d\gamma}{du}(u_k) \right| e^{-\lambda t_{ik}} \varphi_p(qT, \lambda, iT, (l - k)T - t_{ik}). \end{aligned} \quad (11.62)$$

Рассмотрим теперь устойчивость насыщенных периодических режимов. Если для рассматриваемого периодического режима при некоторых k имеем $t_{1k} = T$, причем $|u_k| > u_m$, то по (3) для этих k будет $\frac{dt_{1k}}{d\alpha} = 0$. Поэтому для указанных k соответствующие слагаемые в (55) выпадут и исследование устойчивости упростится. Задачи, в которых для ряда k имеем $|u_k| = u_m$, рассматриваться не будут, так как в этом случае в соответствии с рис. 52 не существует производной $\frac{d\gamma}{du}(u = u_k)$ и изложенная выше теория неприменима. При $q = 1$ для насыщенного режима при $|u_0| > u_m$ уравнения в вариациях (57) принимают вид

$$y_1 = W_2(p) z_1, \quad z_1 = 0, \quad u_1 = W_1(p) v, \quad v_1 = a(t) y \quad (11.63)$$

и соответствуют некоторой разомкнутой системе, которая будет устойчивой, если являются устойчивыми элементы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ на рис. 50. Таким образом, условием устойчивости простейшего режима насыщенных колебаний является устойчивость разомкнутой системы, получаемой после удаления импульсного элемента. При $q = 2$, если соответствующие неравенства в (29) и (31)

выполняются строго со знаком $>$, имеем характеристические уравнения

$$1 - k_p \left| \frac{d\gamma}{du} (u_1) \right| e^{-\lambda t_{11}} \Phi_p(2T, \lambda, T, -t_{11}) = 0 \quad (11.64)$$

для случая (26) и

$$1 - k_p \left| \frac{d\gamma}{du} (u_0) \right| e^{-\lambda t_{10}} \Phi_p(2T, \lambda, 0, -t_{10}) = 0, \quad (11.65)$$

для случая (27).

Для полностью насыщенных колебаний (34) условием их устойчивости будет устойчивость разомкнутой системы (63).

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Вводные замечания

В главе рассматриваются переходные процессы и установившиеся периодические колебания систем управления, содержащих кроме линейных стационарных элементов устройства, описываемые кусочно-линейными операторами. *Кусочно-линейным оператором* в главе называется выражение вида

$$y = U_{1д}(x) x + U_{2д}(x), \quad (0.1)$$

где $U_{1д}$ и $U_{2д}$ — два дискретных оператора в смысле § 1 предыдущей главы.

Основной идеей главы является использование того обстоятельства, что при заданном типе движений такую систему можно формально рассматривать как линейную систему с коммутацией параметров, после чего к ней можно применить методы исследования, изложенные в гл. V. В результате получается стандартная процедура построения переходных процессов, а также уравнений периодов, определяющих параметры искомого периодического режима.

В первом параграфе рассматриваются общие свойства систем, содержащих элементы вида (1), и приводится способ построения переходных процессов в таких системах. Этот способ аналогичен изложенному в § 2 гл. V, с тем лишь отличием, что соответствующие моменты переключения вычисляются по ходу решения задачи. При этом не делается никаких предположений о виде передаточных функций линейных элементов системы. В § 2 и § 3 приводится общий путь определения периодических колебаний и исследования их устойчивости в системах рассматриваемого класса при условии, что линейные элементы системы имеют сосредоточенные параметры. При этом задача определения периодического режима сводится к рассмотрению трансцендентных уравнений периодов, записанных в замкнутой форме.

Для исследования устойчивости периодического режима способом, аналогичным изложенному в гл. VI, в главе строятся уравнения в вариациях, соответствующие некоторой импульсной системе, содержащей импульсные элементы I и II рода. Исследование устойчивости этой системы проводится на основе общих соображений § 7 гл. V. В главе указываются некоторые важные особенности, связанные с исследованием автоколебаний кусочно-линейных автономных непрерывных систем. Природа этих особенностей связана с тем, что система в вариациях, соответствующая устойчивому автоколебательному режиму, находится на границе области устойчивости.

В заключительных параграфах изложенная общая методика иллюстрируется решением ряда прикладных задач.

§ 1. Кусочно-линейные операторы и системы

Нелинейный оператор

$$z = U_k(y) \quad (1.1)$$

будем называть *кусочно-линейным*, если связь между z и y определяется равенством

$$z = U_{1д}(y)y + U_{2д}(y), \quad (1.2)$$

где $U_{1д}$ и $U_{2д}$ — два дискретных оператора в смысле § 1 предыдущей главы.

Моментами переключения для кусочно-линейного оператора (1) являются моменты переключения операторов $U_{1д}$ и $U_{2д}$. В общем случае эти моменты являются некоторыми функционалами от входного сигнала

$$t_i = t_i[y(t)]. \quad (1.3)$$

Между двумя последовательными моментами переключения зависимость (2) превращается в линейную:

$$z = a_i y + b_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (1.4)$$

где принято, что

$$U_{1д}(y) = a_i, \quad U_{2д}(y) = b_i, \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (1.5)$$

Этим и объясняется термин «кусочно-линейный оператор». Из формулы (2) следует, что такой оператор структурно может быть представлен в виде параллельного соединения, содержащего два релейных или им-

пульсных элемента, один из которых входит в систему в качестве множительного устройства. При этом оператор $U_{1д}$ характеризует зависящий от входного сигнала коэффициент усиления элемента, а оператор $U_{2д}$ — постоянную составляющую на интервале времени $t_{i-1} < t < t_i$.

Кусочно-линейные операторы математически описывают функционирование многочисленных элементов и устройств систем автоматического управления. Фактически такие операторы являются математической моделью элементов, параметры которых на различных интервалах времени, зависящих от свойств входного сигнала, принимают различные постоянные значения. В дальнейшем различные устройства, описываемые кусочно-линейными операторами, будем называть также *кусочно-линейными элементами*.

Пример 1.1. Рассмотрим элемент, осуществляющий широтно-импульсную модуляцию II рода, уравнение которого имеет вид

$$z = \begin{cases} k_p y \operatorname{sign} y(nT), & nT < t < nT + t_{1n}, \\ 0, & nT + t_{1n} < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (1.6)$$

где, аналогично (VI.11.3),

$$t_{1n} = \gamma[y(nT)]. \quad (1.7)$$

Легко видеть, что уравнения (6) эквивалентны следующему представлению:

$$z = U_{1д}(y)y, \quad (1.8)$$

где $U_{1д}(y)$ — характеристика широтно-импульсного элемента, описываемого уравнениями (VI.11.1).

Пример 1.2. Весьма важным и распространенным классом кусочно-линейных операторов являются нелинейности с кусочно-линейными характеристиками.

Простым примером такой нелинейности является функция, изображенная на рис. 55. Здесь

$$z = \begin{cases} a_1 y + b_1, & y < y_0, \\ a_2 y + b_2, & y > y_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

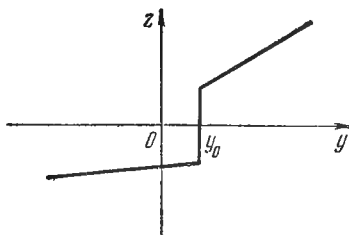


Рис. 55.

Характеристику (9) можно представить в виде (2), где

$$U_{1д}(y) = \begin{cases} a_1, & y < y_0, \\ a_2, & y > y_0, \end{cases} \quad U_{2д}(y) = \begin{cases} b_1, & y < y_0, \\ b_2, & y > y_0. \end{cases} \quad (1.10)$$

В данном случае $U_{1д}$ и $U_{2д}$ — характеристики двух несимметричных реле, переключающихся одновременно.

Как и в предыдущей главе, можно рассматривать и более сложные, многомерные кусочно-линейные операторы, когда входы и выходы дискретных операторов $U_{1д}$ и $U_{2д}$ являются многомерными.

Пример 1.3. Важным примером многомерного кусочно-линейного оператора является элемент с переменной структурой, который описывается уравнениями [29]

$$y = \sum_{i=1}^n \psi_i x_i, \quad (1.11)$$

где

$$\psi_i = \begin{cases} \omega_i, & Sx_i > 0, \\ \lambda_i, & Sx_i < 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

причем

$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i. \quad (1.13)$$

В уравнениях (12), (13) c_i , ω_i , λ_i — постоянные. Очевидно, что в рассматриваемом случае

$$\psi_i = U_{iд}(s, x_i) \quad (1.14)$$

— многомерные релейные операторы с одним выходом y и двумя входами S и x_i . Последовательность моментов переключения операторов (14) определяется уравнениями

$$S = 0, \quad x_i = 0. \quad (1.15)$$

Очевидно, что между двумя последовательными моментами переключения зависимость (11) превращается в линейную.

Если в уравнении (2) оба оператора $U_{1д}$ и $U_{2д}$ являются стационарными, то и соответствующий кусочно-линейный оператор будет стационарным. В случае нестационарности хотя бы одного из операторов $U_{1д}$ и $U_{2д}$ нестационарным будет и кусочно-линейный оператор (2).

Легко проверить, в частности, что элементы, рассмотренные в примерах 2 и 3 этого параграфа, стационарны, а элемент, рассмотренный в примере 1, нестационарный.

В частности, если операторы $U_{1д}$ и $U_{2д}$ имеют соизмеримые периоды, то оператор (2) будем называть *периодическим*.

Используя сказанное, можно ввести понятие кусочно-линейной системы.

Кусочно-линейной будем называть систему, которая представляет собой произвольное соединение линейных и кусочно-линейных элементов. Если при этом все линейные и кусочно-линейные системы стационарны, то соответствующую систему будем называть *стационарной* или *автономной*.

Если же все элементы системы являются периодическими с соизмеримыми периодами, то соответствующую кусочно-линейную систему будем называть *периодической*.

Ниже везде, не оговаривая этого особо, будем рассматривать только такие системы, все линейные элементы которых являются стационарными.

Простейшим, но весьма важным примером такой системы является одноконтурная система, аналогичная изображенной на рис. 40 и описываемая уравнениями

$$y = W(p)z, \quad z = U_k(y) + f(t). \quad (1.16)$$

Передаточная функция $W(p)$ и внешнее возбуждение $f(t)$ предполагаются такими, что любое решение $y(t)$ системы (16) непрерывно.

На интервале двумя последующими моментами переключения t_{i-1} , t_i уравнения (16) с учетом (4) эквивалентны следующим:

$$y = W(p)z, \quad z = a_i y + b_i + f(t), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (1.17)$$

или формально

$$y = \frac{W(p)}{1 - a_i W(p)} [f(t) + b_i] = W_{i3}(p) [f(t) + b_i], \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (1.18)$$

Таким образом, формально на различных интервалах времени рассматриваемая система описывается последовательностью передаточных функций $W_{i3}(p)$.

Этим рассматриваемые системы сходны с системами, изученными в гл. V. Однако в рассматриваемом более общем случае значения моментов переключения t_i и сам вид последовательности передаточных функций $W_{iz}(p)$ зависят от предыдущего движения системы, что не имеет места в линейной задаче.

Следует также подчеркнуть, что система в общем случае определяется последовательностью передаточных функций $W_{iz}(p)$ не однозначно и для полного описания системы необходимо задавать ее структуру.

Нетрудно убедиться, что с несущественными изменениями способ построения переходных процессов, изложенный в § 1 гл. V, может быть применен и в данном случае.

Действительно, при заданных начальных условиях на интервале между начальным моментом и первым моментом переключения уравнения (17) эквивалентны следующему интегральному уравнению:

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t-\tau)[a_1 y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_0(t), \quad x(t) = f(t) + b_1, \quad (1.19)$$

которое совершенно аналогично (V.2.25) при $s = 1$. В (19)

$$h(t) = L^{-1}[W(p)] \quad (1.20)$$

— весовая функция линейной части системы, $y_0(t)$ — известная функция, характеризующая начальное состояние линейной части системы, a_1, b_1 — постоянные.

Решая уравнение (19) способом, изложенным в § 2 гл. V, получаем

$$y(t) = \int_{t_0}^t h_{13}(t-\tau)[a_1 y_0(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_0(t), \quad (1.21)$$

$$t_0 < t < t_1,$$

где

$$h_{13}(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{1 - a_1 W(p)}\right] \quad (1.22)$$

— весовая функция эквивалентной замкнутой системы.

Решение (21) верно до первого момента переключения t_1 , который должен быть вычислен в процессе построения решения с помощью условий переключения (3).

Пусть, например, условия переключения имеют вид

$$g_i[y(t_i), t_i] = 0. \quad (1.23)$$

Тогда, подставляя в (23) решение (21), можно, вообще говоря, найти момент переключения t_1 , а также значения постоянных a_2 и b_2 , соответствующих последующему интервалу движения.

Тогда при $t > t_1$ уравнения (17) эквивалентны интегральному уравнению

$$y(t) = \int_{t_1}^t h(t-\tau)[a_2 y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_1(t), \quad x(t) = f(t) + b_2, \quad (1.24)$$

где

$$y_1(t) = \int_{t_0}^{t_1} h(t-\tau)[a_1 y(\tau) + x(\tau)] d\tau + y_0(t) \quad (1.25)$$

— известная функция.

Решая уравнение (24), можно продолжить решение на интервал $t_1 < t < t_2$ и т. д.

Вообще, легко заметить, что изложенный способ построения переходных процессов представляет собой вариант широко распространенного метода припасовывания (см., например, [75]), который применяется традиционно к системам, описываемым на различных интервалах времени различными системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Изложенный вариант метода припасовывания является весьма универсальным и обладает двумя важными достоинствами.

Во-первых, способ пригоден для построения переходных процессов непосредственно по структурной схеме системы без перехода к уравнениям движения. Во-вторых, способ применим к системам весьма общей природы, в частности ко многим системам с распределенными параметрами. При этом припасовывание решений, соответствующих различным интервалам времени,

производится автоматически в процессе решения соответствующих интегральных уравнений.

В то же время практическое применение изложенного подхода может быть связано с некоторыми затруднениями, присущими, впрочем, и классическим методам припасовывания. Дело в том, что продолжение решений с помощью условий переключения (3) в некоторых случаях оказывается невозможным, что связано с возникновением в системе скользящих режимов или других особых типов движений. Впрочем, если провести предварительный анализ возможных движений изучаемой системы, то, включая в условия переключения (3) участки возникновения скользящих и других особых режимов движения, всегда можно добиться того, что процесс продолжения искомого решения будет возможен. В дальнейшем, однако, будем рассматривать только нормальные режимы движения, обусловленные исходными условиями переключения (3).

§ 2. Определение периодических колебаний кусочно-линейных систем

Если предположить, что в кусочно-линейной системе установились периодические колебания определенного типа, то задачу определения этих колебаний можно свести к рассмотрению некоторого интегрального уравнения. При некоторых дополнительных предположениях относительно передаточных функций линейных элементов системы это интегральное уравнение допускает точное решение, что приводит к способу построения уравнений периодов для периодических колебаний данного типа. Изложим более подробно указанный подход для простейшей одноконтурной системы.

Рассматриваем систему, описываемую уравнениями (1.16):

$$y = W(p)z, \quad z = U_k(y) + f(t), \quad (2.1)$$

где U_k — некоторый кусочно-линейный оператор, а передаточная функция $W(p)$ и внешнее возбуждение $f(t)$ предполагаются такими, что решение $y(t)$ уравнений (1) является непрерывной функцией t .

Предположим, что в системе (1) установились периодические колебания периода T , причем

$$\left. \begin{aligned} f(t) = f_{\pi}(t) = f_{\pi}(t+T), \quad y(t) = y_{\pi}(t) = y_{\pi}(t+T), \\ z(t) = z_{\pi}(t) = z_{\pi}(t+T). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Выберем за начальный некоторый момент переключения кусочно-линейного элемента t_0 , $0 \leq t_0 < T$. Тогда, в силу периодичности, из соотношения (1.4) вытекает, что

$$\left. \begin{aligned} z_{\pi}(t) = a_i y_{\pi}(t) + b_i + f_{\pi}(t), \quad t_{i-1} < t < t_i \\ (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

и, кроме того,

$$a_{i+m} = a_i, \quad b_{i+m} = b_i. \quad (2.4)$$

В соотношениях (3), (4) тип входного сигнала $y_{\pi}(t)$ предполагается известным, a_i, b_i — заданные числа либо постоянные, зависящие определенным образом от характера движения системы, t_i ($i = 0, 1, \dots, m$) — моменты переключения, $t_m = T + t_0$.

Если исходная система неавтономна, то период T заранее задан и в соотношениях (3) неизвестными являются моменты переключения $t_0, t_1, \dots, t_{m-1}$.

В автоколебательном случае, когда $f(t) = 0$ и оператор $U_{\kappa}(y)$ стационарный, можно считать начальный момент известным, полагая, например, $t_0 = 0$; тогда в представлении (3) неизвестными являются величины $t_1, \dots, t_m = T$. Если ввести в рассмотрение кусочно-постоянные периодические функции

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a_i, \quad t_{i-1} < t < t_i \\ (i = 1, 2, \dots, m), \quad a(t) &= a(t+T), \\ b(t) &= b_i, \quad t_{i-1} < t < t_i \\ (i = 1, 2, \dots, m), \quad b(t) &= b(t+T), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

то соотношения (3) и (4) можно представить в эквивалентной форме:

$$z_{\pi}(t) = a(t) y_{\pi}(t) + b(t) + f_{\pi}(t). \quad (2.6)$$

Таким образом, если в системе (1) установились периодические колебания (2), то на входе линейной части системы действует периодическое возбуждение вида (6).

Поэтому, предполагая линейную часть системы (1) нерезонансной и используя основное соотношение (II. 3.7), получим

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_0}^{T+t_0} \varphi(T, t - \tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + b(\tau) + f_{\Pi}(\tau)] d\tau. \quad (2.7)$$

Полагая здесь

$$t = t_1 + t_0, \quad \tau = \tau_1 + t_0, \quad y_{\Pi}(t) = y_{\Pi}(t_1 + t_0) = \tilde{y}_{\Pi}(t_1), \quad (2.8)$$

получим эквивалентное уравнение:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\Pi}(t_1) = \int_0^T \varphi(T, t_1 - \tau_1) [a(\tau_1 + t_0) \tilde{y}_{\Pi}(\tau_1) + \\ + b(\tau_1 + t_0) + f_{\Pi}(\tau_1 + t_0)] d\tau_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При этом из (5) следует, что

$$a(\tau_1 + t_0) = a_i, \quad b(t_1 + t_0) = b_i \quad \text{при} \quad t'_{i-1} < t_1 < t'_i, \quad (2.10)$$

где

$$t'_i = t_i - t_0, \quad t'_0 = 0, \quad t_m = T. \quad (2.11)$$

Если в уравнениях (7), (9) временно считать моменты переключения t_i , t'_i известными, то эти уравнения по форме совпадут с уравнениями (V. 1.8) и (V. 1.9) периодических колебаний линейной системы с периодической коммутацией параметров, если только считать, что внешнее возбуждение $x_{\Pi}(t)$ равно соответственно

$$x_{\Pi}(t) = b(t) + f_{\Pi}(t), \quad \tilde{x}_{\Pi}(t_1) = b(t_1 + t_0) + f_{\Pi}(t_1 + t_0). \quad (2.12)$$

Аналогичным образом можно составить интегральное уравнение, определяющее симметричные периодические колебания системы (1). В этом случае предполагаем, что в системе (1) внешнее возбуждение симметрично:

$$f_{\Pi}(t) = -f_{\Pi}\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (2.13)$$

и, кроме того,

$$y_{\Pi}(t) = -y_{\Pi}\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad z_{\Pi}(t) = -z_{\Pi}\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (2.14)$$

При этом, аналогично (3), (4), будем иметь

$$U_k[y_{\Pi}(t)] = a_i y_{\Pi}(t) + b_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (2.15)$$

и, кроме того,

$$a_{i+q} = a_i, \quad b_{i+q} = -b_i,$$

что эквивалентно следующему:

$$U_k[y_{\Pi}(t)] = a(t) y_{\Pi}(t) + b(t), \quad (2.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= a_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad a(t) = a\left(t + \frac{T}{2}\right), \\ b(t) &= b_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad b(t) = -b\left(t + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Таким образом, в установившемся симметричном периодическом режиме на линейную часть системы действует симметричное внешнее возбуждение

$$z_{\Pi}(t) = a(t) y_{\Pi}(t) + b(t) + f_{\Pi}(t) = -z_{\Pi}\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Поэтому, применяя (II. 3.15), приходим к интегральному уравнению

$$y_{\Pi}(t) = \int_{t_0}^{\frac{T}{2} + t_0} \psi(T, t - \tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + b(\tau) + f_{\Pi}(\tau)] d\tau, \quad (2.18)$$

или в эквивалентном виде, с учетом (8),

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\Pi}(t_1) = \int_0^{\frac{T}{2}} \psi(T, t_1 - \tau_1) [a(\tau_1 + t_0) \tilde{y}_{\Pi}(\tau_1) + \\ + b(\tau_1 + t_0) + f_{\Pi}(\tau_1 + t_0)] d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Уравнения (18) и (19) по форме совпадают с уравнениями (V. 1.18) и (V. 1.19), если только считать, что внешнее возбуждение определяется соотношениями (12).

Предположим теперь, что передаточная функция $W(p)$ в уравнениях (1) — дробно-рациональная. Это

предположение сохраняется и далее. Тогда, предполагая временно моменты переключения t_i известными, мы можем применить для решения интегральных уравнений (9) и (19) способ, изложенный в § 3 гл. V.

В результате решения мы получим соотношения вида

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi}(t) &= y_{\Pi}(t, t_0, \dots, t_m), \\ \tilde{y}_{\Pi}(t_1) &= \tilde{y}_{\Pi}(t_1, t'_0, \dots, t'_m), \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

определяющие искомое периодическое решение через неизвестные моменты переключения.

Если присоединить к соотношениям (20) условия переключения, то мы придем к уравнениям периодов для рассматриваемой задачи.

Пусть, например, условия переключения имеют вид

$$y_{\Pi}(t_i) = y_{i3}, \quad (2.21)$$

где y_{i3} — заданные числа; тогда из (20) и (21) получается

$$y_{\Pi}(t_i, t_0, \dots, t_m) = y_{i3}. \quad (2.22)$$

Следует, однако, отметить, что применение изложенного подхода к автономным системам связано с некоторыми затруднениями, которые для конкретности проиллюстрируем для случая колебаний, определяемых интегральным уравнением (19).

Предположим для конкретности, что передаточная функция $W(p)$ имеет вид (V.3.5); тогда по (V.3.76) и (V.3.77) уравнения (19) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\Pi}(t_1) &= \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) [a(\tau_1 + t_0) \tilde{y}_{\Pi}(\tau_1) + \\ &+ b(\tau_1 + t_0) + f_{\Pi}(\tau_1 + t_0)] d\tau_1 + \sum_{\rho=1}^n \tilde{c}_{1\rho} e^{p_{\rho} t_1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{1\rho} &= -\gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_{\rho} \frac{T}{2}}} \int_0^{T/2} e^{-p_{\rho} \tau_1} [a(\tau_1 + t_0) \tilde{y}_{\Pi}(\tau_1) + \\ &+ b(\tau_1 + t_0) + f_{\Pi}(\tau_1 + t_0)] d\tau_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Применяя к уравнению (23) изложенный в § 3 гл. V способ решения, мы в результате придем к системе линейных уравнений, определяющих постоянные $\tilde{c}_{1\rho}$:

$$\tilde{c}_{1\rho} = \sum_{s=1}^n \chi_{\rho s} \tilde{c}_{1s} + \xi_{\rho}, \quad (2.25)$$

где величины $\chi_{\rho s}$ и ξ_{ρ} известным образом зависят от неизвестных моментов переключения.

Если

$$\det |\delta_{\rho s} - \chi_{\rho s}| \neq 0, \quad \delta_{\rho s} = \begin{cases} 1, & \rho = s, \\ 0, & \rho \neq s, \end{cases} \quad (2.26)$$

то из уравнений (25) однозначно определяются постоянные

$$\tilde{c}_{1\rho} = \tilde{c}_{1\rho}(t_0, \dots, t_m). \quad (2.27)$$

С помощью соотношений (27), используя соображения § 3 гл. V, можно составить решение (20) и, соответственно, уравнения периодов (22). Другое положение возникает, если

$$\det |\delta_{\rho s} - \chi_{\rho s}| = 0. \quad (2.28)$$

В этом случае система уравнений (25) является особой и найти зависимости (27) невозможно. Соответственно невозможно и применение изложенного метода построения уравнений периодов.

На первый взгляд может показаться, что случай (28) является искусственным и на практике им можно пренебречь. На самом деле это не так. Как показано в [75], особый случай (28) всегда имеет место, если исходная система автономна и кусочно-линейный оператор

$$U(t) = U_{\kappa}[y(t)]$$

каждому непрерывному входному сигналу сопоставляет непрерывный выходной сигнал.

Покажем, как составить уравнения периодов в особом случае (28). Для этого заметим, что из формул § 3 гл. 5 вытекает, что на каждом из интервалов $t_{i-1} < t < t_i$ решение $y_{\Pi}(t)$ имеет вид

$$y_{\Pi}(t) = \sum_{\rho=1}^n \tilde{c}_{1\rho} f_{is}(t, t_0, \dots, t_m) + y_i(t, t_0, \dots, t_m), \quad (2.29)$$

где f_{is} , y_i — функции, не зависящие от $\tilde{c}_{1\rho}$, но зависящие от моментов переключения. Поэтому, используя условия переключения (21), из (29) получим

$$\sum_{\rho=1}^n \tilde{c}_{1\rho} f_{is}(t_i, t_0, \dots, t_m) = y_{is} - y_s(t_i, t_0, \dots, t_m). \quad (2.30)$$

Соотношения (25) и (30) в совокупности представляют собой систему из $n + q$ уравнений, определяющих неизвестные $\tilde{c}_{1\rho}$ и моменты переключения t_i . Неизвестные $\tilde{c}_{1\rho}$ входят в уравнения (25), (30) линейно, поэтому их можно исключить, пользуясь известными из алгебры способами.

На подробностях такого исключения здесь останавливаться не будем, так как ниже оно иллюстрируется рядом примеров. В результате исключения неизвестных $\tilde{c}_{1\rho}$ от уравнений (25), (30) можно перейти к системе из q уравнений, определяющих моменты переключения.

Следует отметить, что такой путь составления уравнений периодов, связанный с исключением неизвестных $\tilde{c}_{1\rho}$ из (25), (30), можно применять и в общем случае. Достоинство такого подхода заключается в том, что он, вообще говоря, не связан с выполнением условия (26) и может применяться во всех случаях. Однако при этом теряется симметрия решения.

При использовании изложенного метода решения целесообразно сделать предварительное преобразование исходных уравнений (1), аналогично (V. 1.22), для того, чтобы сделать одну из постоянных a_i равной нулю. В этом случае процесс вычислений существенно упростится.

Все сказанное дословно переносится на случай несимметричных колебаний, если использовать уравнение (7) и метод его решения, изложенный в § 3 гл. V. При этом, однако, число уравнений периодов по сравнению с исходной задачей увеличивается вдвое.

Отметим также, что, найдя некоторое решение уравнений периодов, его следует проверить с точки зрения выполнения дополнительных условий, заложенных предварительно при постановке исходной задачи, например условий правильности направления переключения, условий отсутствия дополнительных моментов переключения

и т. п. Только при выполнении всех предварительных предположений некоторому решению уравнений периодов соответствует периодический режим исходной системы.

Сказанное выше предполагало, что числа a_i , b_i в формулах (5), (17) являются известными. В ряде задач эти числа зависят от движения системы. В этих случаях к уравнениям периодов надо добавить соотношения, определяющие a_i , b_i через параметры системы и неизвестные моменты переключения. Примером такой ситуации является рассматриваемая ниже система с люфтом.

Изложенный метод без существенных изменений переносится на многомерные системы.

§ 3. Устойчивость периодических колебаний кусочно-линейных систем. Уравнения в вариациях

Для исследования устойчивости найденных изложенным выше путем периодических режимов в малом можно воспользоваться методом малых возмущений, аналогично тому, как это делалось в предыдущей главе при изучении релейных систем. Используя метод малых возмущений относительно изучаемого периодического режима, можно получить уравнения в вариациях, аналогичные классическим, но учитывающие разрывность исследуемой задачи.

Выше предполагалось, что изучаемая система состоит из линейных стационарных элементов с уравнениями

$$y_i = W_i(p) z_i \quad (3.1)$$

и элементов с уравнениями вида

$$z_i = U_{ki} [y_i(t)] + f_i(t) = U_{1д}^i y + U_{2д}^i + f_i(t), \quad (3.2)$$

где $U_{1д}^i$ и $U_{2д}^i$ — заданные дискретные операторы, $f_i(t)$ — известные функции. Далее везде предполагается, что входные сигналы всех дискретных элементов являются непрерывными функциями t , но могут иметь разрывную, хотя ограниченную производную. В практических задачах это предположение, как правило, выполняется. Физически оно сводится к предположению о наличии у линейных элементов системы необходимых

фильтрующих свойств и накладывает некоторые ограничения на структуру системы.

Предположим, что найдено периодическое решение уравнений (1), (2)

$$y_i = y_{i\pi}(t) = y_{i\pi}(t + T), \quad z_i = z_{i\pi}(t) = z_{i\pi}(t + T), \quad (3.3)$$

так что гождественно

$$\left. \begin{aligned} y_{i\pi}(t) &= W_i(p) z_{i\pi}(t), \\ z_{i\pi}(t) &= U_{ki} [y_{i\pi}(t)] + f_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Для составления уравнений в вариациях вводим, как и в классическом случае, новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= y_i(t, \alpha) = y_{i\pi}(t) + \alpha y_{1i}(t, \alpha), \\ z_i &= z_i(t, \alpha) = z_{i\pi}(t) + \alpha z_{1i}(t, \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Тогда с учетом (4) уравнения линейных элементов запишутся в виде

$$y_{1i}(t, \alpha) = W_i(p) z_{1i}(t, \alpha). \quad (3.6)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ отсюда имеем

$$y_{1i}(t) = W_i(p) z_{1i}(t), \quad (3.7)$$

где

$$y_{1i}(t) = y_{1i}(t, \alpha)|_{\alpha=0}, \quad z_{1i}(t) = z_{1i}(t, \alpha)|_{\alpha=0}. \quad (3.8)$$

Уравнения нелинейных элементов с учетом (5) записываются в виде

$$z_{i\pi}(t) + \alpha z_{1i}(t, \alpha) = U_{ki} [y_{i\pi}(t) + \alpha y_{1i}(t, \alpha)] + f_i(t). \quad (3.9)$$

Если правую часть этого уравнения разложить в обобщенный ряд Тейлора (I. 4.33) по параметру α :

$$\begin{aligned} U_{ki} [y_{i\pi}(t) + \alpha y_{1i}(t, \alpha)] &= U_{ki} [y_{i\pi}(t)] + \\ &+ \alpha \frac{D}{D\alpha} U_{ki} [y_{i\pi}(t) + \alpha y_{1i}(t, \alpha)]|_{\alpha=0} + \dots \quad (\alpha=0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

то, подставляя (10) в (9), получаем при $\alpha \rightarrow 0$

$$z_{1l}(t) = \frac{D}{\partial \alpha} U_{kl} [y_{1n}(t) + \alpha y_{1l}(t, \alpha)] \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.11)$$

Система уравнений (7) и (11) в совокупности определяет интересующие нас уравнения первого приближения.

Развернем более подробно уравнение (11), для чего воспользуемся соотношением (2). Тогда из (11) получается

$$z_{1l}(t) = \frac{D}{\partial \alpha} \{ U_{1n}^l [y_{1n}(t) + \alpha y_{1l}(t, \alpha)] [y_{1n}(t) + \alpha y_{1l}(t, \alpha)] + \\ + U_{2n}^l [y_{1n}(t) + \alpha y_{1l}(t, \alpha)] \} \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.12)$$

Для вычисления обобщенной производной, стоящей в правой части этого равенства, следует использовать общие правила дифференцирования произведения обобщенных функций по параметру, изложенные в § 4 гл. I. В силу предположения о непрерывности функции $y(t)$ в данном случае можно воспользоваться формулой (I.4.53). Поэтому, учитывая, что в силу непрерывности

$$\frac{Dy_l(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial y_l(t, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad y_l(t, \alpha) = y_{1n}(t) + \alpha y_{1l}(t, \alpha),$$

имеем по (12)

$$\frac{DU_{kl} [y_l(t, \alpha)]}{\partial \alpha} = \frac{DU_{1n}^l [y_l(t, \alpha)]}{\partial \alpha} y_l(t, \alpha) + \\ + \frac{DU_{2n}^l [y_l(t, \alpha)]}{\partial \alpha} + U_{1n}^l [y_l(t, \alpha)] \frac{\partial y_l(t, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ отсюда имеем

$$z_{1l}(t) = \frac{DU_{1n}^l [y_l(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} y_{1n}(t) + \frac{DU_{1n}^l [y_l(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \\ + U_{1n}^l [y_{1n}(t)] y_{1l}(t). \quad (3.13)$$

Для вычисления обобщенных производных

$$\left. \frac{DU_{1д}^i[y_i(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad \left. \frac{DU_{2д}^i[y_i(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

воспользуемся формулой (VI.3.32), из которой следует с учетом (1.5), что

$$\left. \begin{aligned} \frac{DU_{1д}^i[y_i(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \left. \frac{\partial a_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \\ &\quad - \sum_s \delta_T(t - t_s) \Delta a_{is} \frac{dt_s(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \\ \frac{DU_{2д}^i[y_i(t, \alpha)]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \left. \frac{\partial b_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \\ &\quad - \sum_s \delta_T(t - t_s) \Delta b_{is} \frac{dt_s(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где $t_s(\alpha)$ — моменты переключения внутри периода, в которые имеет разрыв хотя бы одна из функций $U_{1д}^i$, $U_{2д}^i$, $t_s(0) = t_s$;

$$\Delta a_{is} = a_{i,s+1} - a_{is}, \quad \Delta b_{is} = b_{i,s+1} - b_{is} \quad (3.15)$$

— величины соответствующих разрывов, а производные от моментов переключения вычисляются так же, как и в предыдущей главе. Подставляя выражения (14) в (13), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} z_{1i}(t) &= U_{1д}^i[y_{iп}(t)] y_{1i}(t) + \left. \frac{\partial a_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} y_{iп}(t) + \\ &+ \left. \frac{\partial b_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \sum_s \delta_T(t - t_s) \Delta U_{ки}^s \frac{dt_s(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\Delta U_{ки}^s = \Delta a_{is} y_{iп}(t_s) + \Delta b_{is}. \quad (3.17)$$

Уравнение (16) показывает, что варьированный кусочно-линейный оператор эквивалентен параллельному соединению звена с периодически меняющимся кусочно-постоянным коэффициентом усиления и некоторого идеального импульсного элемента. Поэтому система уравнений в вариациях, получающаяся из (7) и (16),

представляет собой линейную систему с периодической коммутацией параметров, содержащую также амплитудно-импульсные элементы. Общие соображения об исследовании таких систем изложены в гл. IV и V. В тех задачах, когда характеристика нелинейного элемента непрерывна, уравнение варьированного звена упрощается и принимает вид

$$z_{1i}(t) = U_{1i}^t [y_{in}(t)] y_{1i}(t) + \left. \frac{\partial a_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} y_{in}(t) + \left. \frac{\partial b_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.18)$$

В том случае, когда передаточные функции всех линейных элементов (1) дробно-рациональны, периодический режим неавтономной системы будет асимптотически устойчив, если все характеристические показатели уравнений в вариациях лежат в левой полуплоскости. При этом характеристическое уравнение в рассматриваемых задачах оказывается периодичным относительно λ и фактически зависит от переменной $z = e^{\lambda T}$. Поэтому условием устойчивости неавтономных периодических колебаний является также расположение корней z_i характеристического уравнения внутри единичного круга.

В автономном случае характеристическое уравнение будет иметь по крайней мере один корень z_1 , равный единице. Но в силу теоремы Андронова и Витта [55] автоколебательный режим будет устойчив, если остальные корни z_i лежат внутри единичного круга.

§ 4. Периодические колебания в нелинейной системе с ключом

Рассмотрим задачу об определении периодических колебаний в системе с ключом, продолжительность времени замыкания которого является функцией от входного сигнала. Уравнения системы имеют вид

$$y = W(p)z, \quad z = U_{1i}(y)y, \quad (4.1)$$

где

$$U_{1i}(y) = \begin{cases} 1, & nT < t < nT + t_n, \\ 0, & nT + t_n < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (4.2)$$

причем

$$0 < t_n(y) = \gamma(y) \leq T, \quad \gamma(y) = T, \quad \text{при } |y| \geq y_m. \quad (4.3)$$

Функцию $\gamma(y)$ предполагаем четной и дифференцируемой. Передаточная функция $W(p)$ определяется соотношениями (V. 3.3), (V. 3.5).

Будем рассматривать простейший ненасыщенный периодический режим системы (1), имеющий период T . В этом случае функция $a(t)$ (2.5) равна

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T, \end{cases} \quad a(t) = a(t + T) \quad (4.4)$$

и интегральное уравнение периодического режима (2.7) имеет вид

$$y_{\pi}(t) = \int_0^{t_1} \varphi(T, t - \tau) y_{\pi}(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Если считать величину t_1 известной, то для решения уравнения (5) можно применить соотношения § 3 гл. V. Учитывая, что (5) является частным случаем уравнения (V. 3.32) при $x_{\pi}(t) = 0$, и используя формулу (V. 3.40), находим, что решение уравнения (5) при $0 \leq t < t_1$ имеет вид

$$y_{\pi}(t) = \sum_{\rho=1}^n d_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}, \quad (4.6)$$

где

$$d_{1\rho} = \gamma_{1\rho} \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_{1\alpha}}{p_{1\rho} - p_{\alpha}} \quad (4.7)$$

и сохранены все обозначения § 3 гл. V. При этом коэффициенты $c_{1\alpha}$ определяются из однородной системы уравнений, получающейся из (V. 3.60) при $\delta_{\rho} = 0$:

$$c_{1\rho} = \sum_{s=1}^n u_{\rho s} c_{1s}, \quad (4.8)$$

где по (V. 3.60) и (V. 3.56)

$$\left. \begin{aligned} u_{\rho s} &= \sum_{k=1}^n \frac{\beta_{\rho k} \gamma_{1k}}{p_{1k} - p_s}, \\ \beta_{\rho k} &= \gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} T}}{1 - e^{p_{\rho} T}} \frac{e^{(p_{1k} - p_{\rho}) t_1} - 1}{p_{1k} - p_{\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

В данном случае для совместности уравнений (8) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\det |\delta_{ps} - u_{ps}(t_1)| = 0. \quad (4.10)$$

Это соотношение, определяющее величины t_1 , и является уравнением периодов для рассматриваемой задачи. Это уравнение не зависит от вида закона переключения (3).

Пусть число $\bar{t}_1$,

$$0 < \bar{t}_1 < T, \quad (4.11)$$

является корнем уравнения (10). Тогда в силу условий переключения (3) должно иметь место равенство

$$\bar{t}_1 = \gamma[y_n(0)]. \quad (4.12)$$

Решая это уравнение, например, графически, получим, учитывая четность функции $\gamma(y)$ (3):

$$y_n(0) = \pm v, \quad (4.13)$$

где v — известное число.

Если учесть (6), (7) и (V.3.14), то окажется, что уравнение (13) эквивалентно следующему:

$$\sum_{\rho=1}^n d_{1\rho} = \sum_{\alpha=1}^n c_{1\alpha} \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{1\rho}}{p_{1\rho} - p_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n c_{1\alpha} = \pm v. \quad (4.14)$$

Используя (14), можно, вообще говоря, определить неизвестные постоянные $c_{1\alpha}$.

Действительно, возьмем $n-1$ уравнение из системы (8), например первые, и присоединим к ним соотношение (14), тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n c_{1\alpha} (\delta_{s\alpha} - u_{s\alpha}) &= 0, & s &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{\alpha=1}^n c_{1\alpha} &= \pm v. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Соотношения (15) представляют собой две системы линейных уравнений, из которых, вообще говоря, сразу определяются две системы чисел $c_{1\alpha}$, соответствующих разным знакам свободного члена в последнем уравнении. Фактически, однако, достаточно рассматривать только

одну из этих систем, так как другое решение сразу получится из первого умножением на -1 . Это соответствует тому факту, что уравнения (1) не меняются при замене z на $-z$, y на $-y$.

Если постоянные $c_{1\alpha}$ найдены, то по (6) и (7) находим решение $y_{\Pi}(t)$ при $0 < t < \bar{t}_1$.

Далее, с помощью соотношения

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^{\bar{t}_1} h(t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n c_{1\rho} e^{\rho t}, \quad \bar{t}_1 < t < T, \quad (4.16)$$

периодическое решение может быть продолжено на интервал $\bar{t}_1 < t < T$.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденного периодического режима. Для этого составим соответствующие уравнения в вариациях. В соответствии с (3.11) для рассматриваемой задачи эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p) z_1, \\ z_1 &= \frac{D}{\partial \alpha} [U_{1\alpha} [y_{\Pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)] [y_{\Pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]]_{\alpha=0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Выполняя дифференцирование, варьированное уравнение нелинейного элемента можно представить в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{D}{\partial \alpha} U_{1\alpha} [y_{\Pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]|_{\alpha=0} y_{\Pi}(t) + \\ &\quad + U_{1\alpha} [y_{\Pi}(t)] y_1(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Для вычисления производной

$$\frac{D}{\partial \alpha} U_{1\alpha} [y_{\Pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]$$

можно воспользоваться общей формулой (VI.3.32), которая в данном случае с учетом (2) приводит к следующему:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial \alpha} U_{1\alpha} [y_{\Pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)] &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - \bar{t}_1) \frac{dt_k(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Входящие в (19) производные от моментов переключения определяются из условия переключения

$$t_k(\alpha) = \gamma[y_{\Pi}(kT) + \alpha y_1(kT, \alpha)] = \gamma[y_{\Pi}(0) + \alpha y_1(kT, \alpha)],$$

откуда получается, с учетом (13),

$$\left. \frac{dt_k(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d\gamma}{dy}(\nu) y_1(kT). \quad (4.20)$$

Поэтому из (19) находим

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial \alpha} U_{\text{из}}[y_{\Pi}(t) + \alpha y_1(t, \alpha)] &= \\ &= \frac{d\gamma}{dy}(\nu) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - \bar{t}_1) y_1(kT) = \\ &= \frac{d\gamma}{dy}(\nu) \delta_T(t - \bar{t}_1) y_1(t - \bar{t}_1). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Подставляя (21) в (18) и учитывая, что в силу периодичности функции $y_{\Pi}(t)$

$$\delta_T(t - \bar{t}_1) y_{\Pi}(t) = y_{\Pi}(\bar{t}_1) \delta_T(t - \bar{t}_1),$$

окончательно получим, что уравнения в вариациях для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p) z_1, \\ z_1 &= \frac{d\gamma}{dy}(\nu) y_{\Pi}(\bar{t}_1) \delta_T(t - \bar{t}_1) y_1(t - \bar{t}_1) + \bar{a}(t) y_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

где

$$\bar{a}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \bar{t}_1, \\ 0, & \bar{t}_1 < t < T. \end{cases} \quad (4.23)$$

Уравнения (22) соответствуют импульсной системе, в которой параллельно импульсному элементу включен элемент с линейным ключом. Способы построения характеристического уравнения для системы такого типа изложены в § 7 гл. V.

В соответствии с (V.7.5) уравнения (22) можно представить в виде

$$y_1 = W_{yu}(p, t) u, \quad u = \frac{d\gamma}{dy}(\nu) y_{\Pi}(\bar{t}_1) \delta_T(t - \bar{t}_1) y_1(t - \bar{t}_1), \quad (4.24)$$

где $W_{yu}(p, t)$ — передаточная функция соответствующей линейной системы с ключом.

Полагая в (24)

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda t} y_{1n}(t), & y_{1n}(t) &= y_{1n}(t+T), \\ u &= e^{\lambda t} u_{1n}(t), & u_{1n}(t) &= u_{1n}(t+T), \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} y_{1n}(t) &= W_{yu}(p + \lambda, t) U_{1n}(t), \\ u_{1n}(t) &= e^{-\lambda \bar{t}_1} \frac{dy}{dy}(\nu) y_n(\bar{t}_1) \delta_T(t - t_1) y_{1n}(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Рассматривая $U_{1n}(t)$ как периодическое внешнее возбуждение, находим

$$y_{1n}(t) = e^{-\lambda \bar{t}_1} \frac{dy}{dy}(\nu) y_n(\bar{t}_1) \varphi_{yu}(T, \lambda, t, t - \bar{t}_1) y_{1n}(0), \quad (4.27)$$

где

$$\varphi_{yu}(T, \lambda, t, t - \tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{yu}(\lambda + ki\omega, t) e^{ki\omega(t-\tau)}$$

— СИЧХ замкнутой системы с ключом, вычисляемая по формулам примера 4.3 § 4 гл. V.

Подставляя в (27) $t = 0$, получаем искомое характеристическое уравнение:

$$1 - \frac{dy}{dy}(\nu) y_n(\bar{t}_1) e^{-\lambda \bar{t}_1} \varphi_{yu}(T, \lambda, 0, -\bar{t}_1) = 0. \quad (4.28)$$

Легко убедиться, что левая часть характеристического уравнения (28) периодична по λ с периодом $i\omega$. Переходя к переменной $z = e^{\lambda T}$, из (28) можно получить алгебраическое уравнение относительно z .

При сделанных выше предположениях относительно вида передаточной функции $W(p)$ периодический режим будет устойчив, если корни z_i характеристического уравнения лежат внутри единичного круга.

§ 5. Автоколебания в системе с переменной структурой при неидеальности переключающего устройства

В этом параграфе будет рассмотрена система управления, описываемая уравнениями [30]

$$y_1 = W_1(p) y_2, \quad y_2 = W_2(p) [y_1 U_n(y_1, s)], \quad s = c_1 y_1 + y_2, \quad (5.1)$$

где U_d — дискретный оператор, представляющий собой характеристику переключающего устройства, c_1 — постоянная. Передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ предполагаются дробно-рациональными и такими, что решение $y_1(t)$ непрерывно и дифференцируемо в классическом смысле, а решение $y_2(t)$ непрерывно. При идеальном переключающем устройстве зависимость $U_d(y_1, s)$ имеет вид несимметричного реле:

$$U_d(y_1, s) = \begin{cases} \alpha, & v > 0, \\ \beta, & v < 0, \end{cases} \quad v = y_1 s. \quad (5.2)$$

Для учета неидеальности переключающего устройства зависимость $U_d(y_1, s)$ можно принять в виде [87]

$$U_d = \begin{cases} \alpha & \text{при} \begin{cases} v > 0, & \text{если } |s| > \Delta, \\ \dot{s}y_1 < 0, & \text{если } |s| < \Delta, \end{cases} \\ \beta & \text{при} \begin{cases} v < 0, & \text{если } |s| > \Delta, \\ \dot{s}y_1 > 0, & \text{если } |s| < \Delta. \end{cases} \end{cases} \quad (5.3)$$

Покажем, что, не ограничивая общности, при этом можно считать, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$, т. е.

$$U_d = \tilde{U}_d = \begin{cases} 1 & \text{при} \begin{cases} v > 0, & \text{если } |s| > \Delta, \\ \dot{s}y_1 < 0, & \text{если } |s| < \Delta, \end{cases} \\ 0 & \text{при} \begin{cases} v < 0, & \text{если } |s| > \Delta, \\ \dot{s}y_1 > 0, & \text{если } |s| < \Delta. \end{cases} \end{cases} \quad (5.4)$$

Действительно, если положить в (1)

$$U_d = (\alpha - \beta) \tilde{U}_d + \beta, \quad (5.5)$$

где $\tilde{U}_d$ — характеристика, определяемая соотношениями (4), то с учетом (5) уравнения (1) преобразуются к виду

$$y_1 = W_1(p) y_2, \quad y_2 = \tilde{W}_2(p) \tilde{U}_d y_1, \quad s = c_1 y_1 + y_2, \quad (5.6)$$

где

$$\tilde{W}_2(p) = \frac{(\alpha - \beta) W_2(p)}{1 - \beta W_1(p) W_2(p)}. \quad (5.7)$$

Уравнения (6) по виду не отличаются от (1). Поэтому далее будем считать, что уже в исходной системе (1) $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Неидеальность переключателя, обусловленная в данном случае величиной Δ , приводит обычно к возникновению в системе автоколебательного режима.

В принципе в системе (1) возможно возникновение автоколебательных режимов весьма сложных типов. Мы ограничимся, однако, исследованием простейшего симметричного режима с двумя переключениями за половину периода. За начальный момент примем момент переключения U_d от значения 0 к значению 1, предполагая, что это переключение происходит при следующих условиях:

$$y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) > 0, \quad s > \Delta. \quad (5.8)$$

Предполагается также, что второе переключение, происходящее в момент t_1 , $0 < t_1 < \frac{T}{2}$, от значения $U_d = 1$ к значению $U_d = 0$, обусловлено соотношениями

$$\left. \begin{aligned} s(t_1) = cy_1(t_1) + y_2(t_1) &= -\Delta, \quad \dot{s}(t_1 - 0) < 0, \\ \dot{s}(t_1 + 0) < 0, \quad y_1 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Примерный вид предельного цикла на плоскости y_1, y_2 изображен на рис. 56. На участках AB, CD имеем $U_d = 1$, на участках BC, DA — $U_d = 0$. Соотношения (8) и (9) представляют собой условия переключения для рассматриваемой задачи.

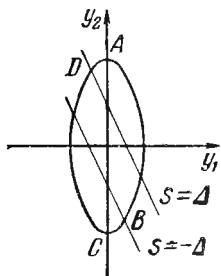


Рис. 56.

Будем разыскивать симметричный автоколебательный режим системы (1) периода T :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{1n}(t) = -y_1\left(t + \frac{T}{2}\right), \\ y_2 &= y_{2n}(t) = -y_2\left(t + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

При этом из (1), (4) имеем

$$s_n(t) = -s_n\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad U_{дн}(t) = U_{дн}\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (5.11)$$

Тогда, если рассматривать автоколебательный режим простейшего типа, то будем иметь

$$U_{дн}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < \frac{T}{2}; \end{cases} \quad (5.12)$$

при этом произведение $U_{\text{дп}}(t)y_{\text{лп}}(t)$ в силу (10) и (11) будет симметричной периодической функцией периода T , т. е.

$$z_{\text{п}}(t) = U_{\text{дп}}(t)y_{\text{лп}}(t) = -z_{\text{п}}\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (5.13)$$

Отсюда вытекает, что если положить

$$W(p) = W_1(p)W_2(p), \quad (5.14)$$

то

$$y_{\text{лп}}(t) = \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) z_{\text{п}}(\tau) d\tau, \quad (5.15)$$

где

$$\psi(T, t) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[(2k+1)i\omega] e^{(2k+1)i\omega t}. \quad (5.16)$$

С учетом (12) уравнение (15) принимает вид

$$y_{\text{лп}}(t) = \int_0^{t_1} \psi(T, t - \tau) y_{\text{лп}}(\tau) d\tau. \quad (5.17)$$

Если временно считать момент t_1 известным, то (17) представляет собой частный случай уравнения (V.3.72), когда внешнее возбуждение отсутствует и функция $a(t)$ имеет вид (V.3.78). Поэтому, используя (V.3.40) и (V.3.41), из (17) имеем, что

$$y_{\text{лп}}(t) = \sum_{\rho=1}^n \tilde{d}_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}, \quad (5.18)$$

где

$$\tilde{d}_{1\rho} = \gamma_{1\rho} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\tilde{c}_{1\alpha}}{p_{1\rho} - p_{\alpha}}, \quad (5.19)$$

причем по (V.3.85) постоянные $\tilde{c}_{1\alpha}$ являются решением системы уравнений

$$\tilde{c}_{1\rho} = \sum_{s=1}^n \tilde{u}_{\rho s} \tilde{c}_{1s} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n), \quad (5.20)$$

коэффициенты которой определяются в соответствии с (V. 3.81) и (V. 3.86):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{\rho s} &= \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{\beta}_{\rho k} \gamma_{1k}}{p_{1k} - p_s}, \\ \tilde{\beta}_{\rho k} &= \gamma_{\rho} \frac{e^{p_{\rho} \frac{T}{2}}}{1 - e^{p_s \frac{T}{2}}} \frac{1 - e^{(p_{1k} - p_s)t}}{p_{1k} - p_{\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

При этом в формулах (18) — (21) принято, что

$$W(p) = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{\rho}}{p - p_{\rho}}, \quad \frac{W(p)}{1 - W(p)} = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{1\rho}}{p - p_{1\rho}}. \quad (5.22)$$

Как следует из приведенных соотношений, коэффициенты $\tilde{u}_{\rho s}$ являются в данном случае функциями двух неизвестных: t_1 и $T/2$. Поэтому уравнения (20) представляют собой систему из n уравнений с $n + 2$ неизвестными $\tilde{c}_{1\rho}$, t_1 , $T/2$.

Для определения всех интересующих нас неизвестных следует к уравнениям (20) добавить два уравнения, получающиеся из условий переключения (8), (9). Для этого необходимо вычислить величину $y_{2n}(t_1)$. Покажем, как это сделать. Для этого заметим, что из второго уравнения (1) следует, что

$$y_{2n}(t) = \int_0^{T/2} \psi_2(T, t_1 - \tau) z_n(\tau) d\tau.$$

Если учесть (12), то отсюда сразу получится

$$y_{2n}(t_1) = \int_0^{t_1} \psi_2(T, t_1 - \tau) y_{1n}(\tau) d\tau. \quad (5.23)$$

Подставляя сюда (18), после интегрирования получим интересующее нас выражение. Не вдаваясь в подробности выкладок, заметим только, что $y_{2n}(t_1)$ будет линейно зависеть от постоянных $\tilde{d}_{1\rho}$ и, следовательно, линейно зависеть от неизвестных постоянных $\tilde{c}_{1\rho}$. Поэтому

с учетом (18) и (4.14) получаем, что условия переключения (8) и (9) приводятся к виду

$$\sum_{p=1}^n \tilde{c}_{1p} = 0, \quad \sum_{p=1}^n \tilde{c}_{1p} q_p \left(t_1, \frac{T}{2} \right) = -\Delta, \quad (5.24)$$

где $q_p(t_1, T/2)$ — известные функции параметров t_1 и $T/2$.

Исключим теперь из уравнений (20) и (24) неизвестные $\tilde{c}_{1p}$, для чего воспользуемся правилами линейной алгебры [83].

Предположим, что

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \tilde{u}_{11} & -\tilde{u}_{12} & \dots & -\tilde{u}_{1n} \\ \tilde{u}_{21} & 1 - \tilde{u}_{22} & \dots & -\tilde{u}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{u}_{n-1,1} & \dots & \dots & -\tilde{u}_{n-1,n} \\ q_1 & \dots & \dots & q_n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.25)$$

Условия совместности уравнений (24) и (20) можно представить в виде

$$\det \left| \delta_{ps} - u_{ps} \left(t_1, \frac{T}{2} \right) \right| = 0 \quad (5.26)$$

и, кроме того,

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \tilde{u}_{11} & \dots & -\tilde{u}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{u}_{n-1,1} & \dots & -\tilde{u}_{n-1,n} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.27)$$

Соотношения (26) и (27) и представляют собой искомые уравнения периодов, определяющие параметры автоколебаний t_1 и $T/2$.

Интересно отметить, что полученные уравнения периодов не зависят от величины Δ . Поэтому в рассматриваемой системе моменты t_1 и полупериоды $T/2$ возможных симметричных автоколебательных режимов не зависят от ширины зоны гистерезиса.

Если пара чисел t_1 и $T/2$ является решением уравнений периодов (26) и (27), то соответствующие постоянные

$\tau_{1\rho}$ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \tilde{c}_{1s} (\delta_{\rho s} - u_{\rho s}) &= 0, & s &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{s=1}^n \tilde{c}_{1s} q_s &= -\Delta, \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

которая в силу (25) имеет единственное решение.

Из уравнений (28) непосредственно видно, что величины $\tau_{1\rho}$ пропорциональны Δ . Отсюда следует, что амплитуда автоколебательного режима пропорциональна ширине зоны гистерезиса.

Если полученная таким образом система чисел $\tilde{c}_{1\rho}$, t_1 , $T/2$ такова, что соответствующие решения $y_{1n}(t)$, $y_{2n}(t)$ удовлетворяют всем предположениям, заложенным предварительно в решение задачи, то ей действительно соответствует автоколебательный режим.

Перейдем теперь к составлению уравнений в вариациях, определяющих устойчивость автоколебаний. С учетом (3.13) уравнения в вариациях в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_{11}(t) &= W_1(p) y_{21}(t), & y_{21}(t) &= W_2(p) z_1(t), \\ z_1(t) &= \frac{D}{\partial \alpha} U_d[y_{1n}(t) + \alpha y_{11}(t, \alpha), \\ s_n(t) + \alpha s_1(t, \alpha)]_{\alpha=0} y_{1n}(t) &+ U_d[y_{1n}(t), s_n(t)] y_{11}(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

где

$$y_{11}(t) = y_{11}(t, \alpha)_{\alpha=0}, \quad y_{21}(t) = y_{21}(t, \alpha)_{\alpha=0} \text{ и т. п.} \quad (5.30)$$

В данном случае

$$\alpha(t) = U_d[y_{1n}(t), s_n(t)] = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (5.31)$$

и остается только вычислить обобщенную производную

$$\frac{D}{\partial \alpha} U_d[y_{1n}(t) + \alpha y_{11}(t, \alpha), s_n(t) + \alpha s_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}. \quad (5.32)$$

При малых α функция $U_d[y_{1n}(t) + \alpha y_{11}(t, \alpha), s_n(t) + \alpha s_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}$ представляется в виде

$$U_d(t, \alpha) = U_d[y_{1n}(t) + \alpha y_{11}(t, \alpha), s_n(t) + \alpha s_1(t, \alpha)] = \begin{cases} 1, & t_k(\alpha) < t < t_{1k}(\alpha), \\ 0, & t_{1k}(\alpha) < t < t_{k+1}(\alpha), \end{cases} \quad (5.33)$$

где $t_k(\alpha)$ и $t_{1k}(\alpha)$ — моменты переключения, определяемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} y_1[t_k(\alpha)] &= 0, \\ s[t_{1k}(\alpha)] &= (-1)^{k-1} \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

При этом при $\alpha \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} t_k(0) &= \frac{kT}{2}, \\ t_{1k}(0) &= t_1 + \frac{kT}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Из второго уравнения (34), учитывая непрерывную дифференцируемость решения $y_1(t)$, получаем, с учетом (8),

$$\frac{dt_k(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = - \frac{y_{11}\left(\frac{kT}{2}\right)}{\dot{y}_{1n}\left(\frac{kT}{2}\right)} = (-1)^{k-1} \frac{y_{11}\left(\frac{kT}{2}\right)}{|\dot{y}_{1n}(0)|}. \quad (5.36)$$

Из этого условия (34) получаем, по (VI. 3.43) и (9),

$$\frac{dt_{1k}(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = - \frac{s_1\left(t_1 + \frac{kT}{2} - 0\right)}{\dot{s}_n\left(t_1 + \frac{kT}{2} - 0\right)} = (-1)^k \frac{s_1\left(t_1 + \frac{kT}{2} - 0\right)}{|\dot{s}_n(t_1 - 0)|}. \quad (5.37)$$

С другой стороны, дифференцируя (33) обобщенно по α с учетом (10) и (11) имеем

$$\begin{aligned} \frac{DU_d(t, \alpha)}{d\alpha} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{kT}{2}\right) \frac{dt_k(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - t_1 - \frac{kT}{2}\right) \frac{dt_{1k}(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Подставляя сюда (36), (37), имеем

$$\begin{aligned} \frac{DU_d(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta\left(t - \frac{kT}{2}\right) \frac{y_{11}\left(\frac{kT}{2}\right)}{|\dot{y}_{11}(0)|} + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta\left(t - t_1 - \frac{kT}{2}\right) \frac{s_1\left(t_1 + \frac{kT}{2} - 0\right)}{|\dot{s}_n(t_1 - 0)|}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Отсюда, в силу (8), (10), следует, что

$$\frac{DU_d(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} y_{11}(t) = \frac{y_{11}(t_1)}{|\dot{s}_n(t_1 - 0)|} \delta_{\frac{T}{2}}(t - t_1) s_1(t - 0). \quad (5.40)$$

С учетом (40) и принятых ранее обозначений уравнения в вариациях (29) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} y_{11}(t) &= W(p) z_1(t), \quad s_1(t) = W_s(p) z_1(t), \\ z_1(t) &= a(t) y_{11}(t) + \frac{y_{11}(t_1)}{|\dot{s}_n(t_1 - 0)|} \delta_{\frac{T}{2}}(t - t_1) s_1(t - 0), \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

где

$$W_s(p) = c_1 W_1(p) + W_2(p). \quad (5.42)$$

Уравнениям (41) соответствует импульсная система типа рассмотренных в § 7 гл. V.

Покажем, как построить характеристическое уравнение этой системы. Для этого полагаем, как обычно,

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= e^{\lambda t} \tilde{y}_n(t), \quad s_1(t) = e^{\lambda t} \tilde{s}_n(t), \quad z_1(t) = e^{\lambda t} \tilde{z}_n(t), \\ \tilde{y}_n(t) &= \tilde{y}_n\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad \tilde{s}_n(t) = \tilde{s}_n\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad \tilde{z}_n(t) = \tilde{z}_n\left(t + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Тогда из (41) получится

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_n(t) &= W(p + \lambda) \tilde{z}_n(t), \quad \tilde{s}_n(t) = W_s(p + \lambda) \tilde{z}_n(t), \\ \tilde{z}_n(t) &= \frac{y_{11}(t_1)}{|\dot{s}_n(t_1 - 0)|} \delta_{\frac{T}{2}}(t - t_1) \tilde{s}_n(t_1 - 0) + a(t) \tilde{y}_n(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(t) &= W(p + \lambda) \tilde{z}_n(t), \quad \tilde{z}_n(t) = a(t) \tilde{y}_n(t) + q_n(t), \\ q_n(t) &= \frac{y_{11}(t_1)}{|\dot{s}_n(t_1 - 0)|} \delta_T(t - t_1) \tilde{s}_n(t_1 - 0), \end{aligned}$$

рассматривая $q_{\Pi}(t)$ как периодическое внешнее возбуждение. Тогда сразу получим

$$\tilde{y}_{\Pi}(t) = \frac{y_{\text{ин}}(t_1)}{|\dot{s}_{\Pi}(t_1 - 0)|} \Phi_p\left(\frac{T}{2}, \lambda, t, t - t_1\right) \tilde{s}_{\Pi}(t_1 - 0), \quad (5.45)$$

где $\Phi_p\left(\frac{T}{2}, \lambda, t, \tau\right)$ — СИЧХ соответствующей системы с ключом. Из (45) и (44) получаем также, что

$$\tilde{s}_{\Pi}(t) = \frac{y_{\text{ин}}(t_1)}{|\dot{s}_{\Pi}(t_1 - 0)|} r\left(\frac{T}{2}, \lambda, t\right) \tilde{s}_{\Pi}(t_1 - 0), \quad (5.46)$$

где

$$\begin{aligned} r\left(\frac{T}{2}, \lambda, t\right) &= \Phi_s\left(\frac{T}{2}, \lambda, t - t_1\right) + \\ &+ \int_0^{t_1} \Phi_s\left(\frac{T}{2}, \lambda, t - \tau\right) \Phi_p\left(\frac{T}{2}, \lambda, \tau, \tau - t_1\right) d\tau, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$\Phi_s\left(\frac{T}{2}, \lambda, t\right)$ — СИЧХ для передаточной функции (42).

Подставляя в соотношения (46) и (47) $t = t_1 - 0$, из условия совместности получим интересующее нас характеристическое уравнение:

$$1 - \frac{y_{\text{ин}}(t_1)}{|\dot{s}_{\Pi}(t_1 - 0)|} r\left(\frac{T_1}{2}, \lambda, t_1 - 0\right) = 0. \quad (5.48)$$

§ 6. Симметричные автоколебания в системе с однозначной типовой нелинейностью

Рассмотрим систему уравнений

$$y = W(p)z, \quad z = f(y), \quad (6.1)$$

где передаточная функция $W(p)$ имеет вид (V.3.5), а нелинейная функция $f(y)$ изображена на рис. 57.

Если положить

$$f_1(y) = \frac{1}{k_1 - k_2} f(y) - \frac{k_2}{k_1 - k_2} y, \quad (6.2)$$

где $f_1(y)$ — характеристика с насыщением, изображенная на рис. 58, то из (1) получится

$$y = W_1(p)z_1, \quad z_1 = f_1(y), \quad (6.3)$$

где

$$W_1(p) = \frac{(k_1 - k_2) W(p)}{1 - k_2 W(p)}. \quad (6.4)$$

Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, можно полагать, что уже в исходной системе функция $f(y)$ имеет вид, изображенный на рис. 58.

Будем рассматривать простейший автоколебательный симметричный режим системы (1), такой, когда

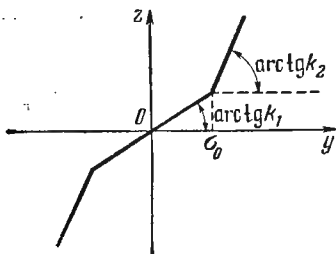


Рис. 57.

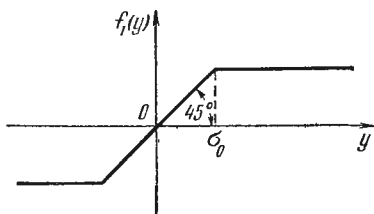


Рис. 58.

каждый из участков нелинейной характеристики приходится на половину периода только один раз. Пусть

$$\left. \begin{aligned} y(t) = y_{\pi}(t) &= -y_{\pi}\left(t + \frac{T}{2}\right), \\ z(t) = z_{\pi}(t) &= -z_{\pi}\left(t + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Если считать, что в начальный момент $t = 0$, $y_{\pi} = -\sigma_0$ и движение при $t > 0$ происходит по наклонному участку нелинейной характеристики, то будем иметь

$$z_{\pi}(t) = \begin{cases} y_{\pi}(t), & 0 < t < t_1, \\ \sigma_0, & t_1 < t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (6.6)$$

В соответствии с (2.6) соотношение (6) равносильно следующему:

$$z_{\pi}(t) = a(t) y_{\pi}(t) + b(t), \quad (6.7)$$

где

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad a(t) = a\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (6.8)$$

$$b(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1, \\ \sigma_0, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad b(t) = -b\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (6.9)$$

Таким образом, с учетом (7) приходим к интегральному уравнению автоколебательного режима

$$y_n(t) = \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) [a(\tau) y_n(\tau) + b(\tau)] d\tau \quad (6.10)$$

или, что эквивалентно для данного случая,

$$y_n(t) = \int_0^{t_1} \psi(T, t - \tau) y_n(\tau) d\tau + \sigma_0 \int_{t_1}^{T/2} \psi(T, t - \tau) d\tau. \quad (6.11)$$

Если считать величину t_1 известной, то (10) будет являться частным случаем уравнения (V. 1.18), в котором функция $a(t)$ определяется по (V. 3.78) и $x_n(t) = b(t)$.

Из формулы (V. 3.40) и соотношений примера 3.3 § 3 гл. V вытекает, что в данном случае

$$y_n(t) = \sum_{\rho=1}^n \tilde{d}_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}, \quad (6.12)$$

где

$$\tilde{d}_{1\rho} = \gamma_{1\rho} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\tilde{c}_{1\alpha}}{p_{1\rho} - p_{\alpha}}, \quad (6.13)$$

причем постоянные $\tilde{c}_{1\alpha}$ являются решениями линейной системы

$$\tilde{c}_{1\rho} = \sum_{s=1}^n \tilde{u}_{\rho s} \tilde{c}_{1s} + \tilde{\delta}_{\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n), \quad (6.14)$$

где коэффициенты $\tilde{u}_{\rho s}$ определяются соотношениями (V. 3.86), (V. 3.81). Постоянные $\tilde{\delta}_{\rho}$ в данном случае, в соответствии с (V. 3.83) и (9), имеют простой вид:

$$\tilde{\delta}_{\rho} = \frac{\gamma_{\rho}}{p_{\rho}} \frac{1 - e^{p_{\rho} \left(\frac{T}{2} - t_1 \right)}}{1 + e^{p_{\rho} \frac{T}{2}}} \sigma_0 = \tilde{\tilde{\delta}}_{\rho} \sigma_0. \quad (6.15)$$

Соотношения (14) представляют собой неоднородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\tilde{c}_{1\rho}$ с коэффициентами и свободными членами,

зависящими от t_1 и $T/2$. Однако разрешить систему (14) относительно $\tilde{c}_{1\rho}$ сразу нельзя, так как определитель

$$\det |\delta_{ik} - \tilde{u}_{ik}|$$

в данном случае обращается в нуль. Это объясняется тем, что в данном случае характеристика нелинейного элемента $z = f(y)$ непрерывна и каждому непрерывному выходному сигналу $y(t)$ сопоставляет непрерывный выходной сигнал $z(t)$ (см. § 2 этой главы). Поэтому для того, чтобы исключить неизвестные $\tilde{c}_{1\rho}$ и получить уравнения периодов, необходимо присоединить к уравнениям (14) условия переключения, которые в данном случае имеют вид

$$y_n(0) = -\sigma_0, \quad y_n(t_1) = \sigma_0. \quad (6.16)$$

Используя равенство

$$\sum_{\rho=1}^n \tilde{d}_{1\rho} = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{c}_{1\alpha},$$

из (12) и (16) получаем

$$\sum_{\alpha=1}^n \tilde{c}_{1\alpha} = -\sigma_0, \quad (6.17)$$

а также

$$\sum_{\rho=1}^n \tilde{d}_{1\rho} e^{p_{1\rho} t_1} = \sigma_0. \quad (6.18)$$

В соответствии с (13) соотношение (18) равносильно следующему:

$$\sum_{\alpha=1}^n \mu_{\alpha} \tilde{c}_{1\alpha} = \sigma_0, \quad (6.19)$$

где

$$\mu_{\alpha} = \sum_{\rho=1}^n \frac{\gamma_{1\rho} e^{p_{1\rho} t_1}}{p_{1\rho} - p_{\alpha}}. \quad (6.20)$$

Если предположить, что

$$\det \begin{vmatrix} 1 - u_{11} & \dots & -u_{1,n-1} & -u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-1} & -u_{n-1,n} \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6.21)$$

то условия совместности уравнений (14), (17) и (18) представятся, в соответствии с [83], в виде

$$\left. \begin{aligned} \det \begin{vmatrix} 1 - u_{11} & -u_{12} & \dots & -u_{1n} & \tilde{\delta}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u_{n1} & -u_{n2} & \dots & -u_{nn} & \tilde{\delta}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 0, \\ \det \begin{vmatrix} 1 - u_{11} & -u_{12} & \dots & \dots & -u_{1n} & \tilde{\delta}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u_{n-1,1} & \dots & \dots & 1 - u_{n-1,n-1} & -u_{n-1,n} & \tilde{\delta}_{n-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n-1} & \mu_n & 1 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Соотношения (22) и представляют собой искомые уравнения периодов. Существенно отметить, что в данном случае уравнения периодов не зависят от величины σ_0 . Если пара чисел t_1 , $T/2$ является решением уравнений периодов (22), то соответствующие постоянные $\tilde{c}_{1\rho}$ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n (\delta_{\rho\alpha} - \tilde{u}_{\rho\alpha}) \tilde{c}_{1\alpha} &= \tilde{\delta}_{\rho}, \quad \rho = 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{\alpha=1}^n \tilde{c}_{1\alpha} &= -\sigma_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

определитель которой, в соответствии с (21), не равен нулю.

Найдя постоянные $\tilde{c}_{1\alpha}$, можно, в принципе, построить искомое решение. Искомое решение строится на интервале $0 < t < t_1$. После этого решение может быть продолжено на интервал $t_1 < t < T/2$ с помощью формулы

$$y_n(t) = \int_0^{t_1} \psi(T, t - \tau) y_n(\tau) d\tau + \sigma_0 \int_{t_1}^{T/2} \psi(T, t - \tau) d\tau, \\ t_1 < t < \frac{T}{2},$$

куда вместо $y_n(t)$ следует подставить решение (12).

Если найденная с помощью указанных приемов функция $y_n(t)$ удовлетворяет всем предположениям,

заложенным предварительно в решение задачи, то она действительно является искомым периодическим решением.

Перейдем теперь к составлению уравнений в вариациях. В соответствии с (3.11) эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(p) z_1, & z_1 &= \frac{D}{d\alpha} f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}, \\ y_1 &= y_1(t, \alpha)_{\alpha=0}, & z_1 &= z_1(t, \alpha)_{\alpha=0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Так как функция $f(y)$ непрерывная, то в данном случае

$$\frac{D}{d\alpha} f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)].$$

Дифференцируя и устремляя α к нулю, отсюда получаем

$$z_1 = a(t) y_1, \quad (6.25)$$

где $a(t) = a(t + T/2)$ — периодическая функция, определяемая соотношением (8). В результате уравнения в вариациях принимают вид

$$y_1 = W(p) z_1, \quad z_1 = a(t) y_1 \quad (6.26)$$

и соответствуют простейшей одноконтурной системе с ключом.

В соответствии с § 6 гл. V устойчивость системы (26) определяется корнями характеристического уравнения

$$\det |\delta_{\rho k} - \mu_{\rho k}(\lambda)| = 0, \quad \delta_{\rho k} = \begin{cases} 1, & \rho = k, \\ 0, & \rho \neq k. \end{cases} \quad (6.27)$$

Выражения коэффициентов $\mu_{\rho k}(\lambda)$ для данного примера даются соотношениями (V.4.26), в которых следует заменить T на $T/2$, г. е.

$$\mu_{\rho k}(\lambda) = \gamma_{\rho} \frac{e^{(p_{\rho} - \lambda) \frac{T}{2}}}{1 - e^{(p_{\rho} - \lambda) \frac{T}{2}}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} [e^{(p_{1\alpha} - p_{\rho}) t_1} - 1]}{(p_{1\alpha} - p_{\rho})(p_{1\alpha} - p_k)}. \quad (6.28)$$

Переходя к переменной $z = e^{\lambda T}$, из (27) получим алгебраическое уравнение относительно z . При этом, в силу автономности изучаемой системы и симметрии периодического режима, характеристическое уравнение будет

иметь по крайней мере один корень $z_1 = -1$ [75]. Если остальные корни z_i характеристического уравнения лежат внутри единичного круга, то найденный автоколебательный режим будет устойчивым.

§ 7. Исследование автоколебаний в системе с люфтом

Характеристика люфта (рис. 59) относится к своеобразному классу кусочно-линейных операторов, для которых числа a_i , b_i в выражениях (1.4), (1.5) могут быть различными при входных сигналах одного и того же типа.

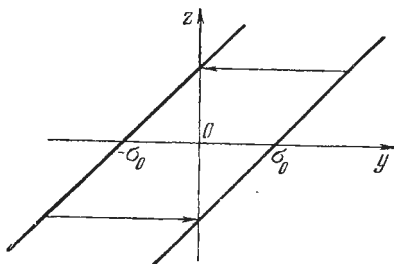


Рис. 59.

При применении изложенного выше подхода к системам, содержащим такие кусочно-линейные операторы, приходится учитывать некоторые дополнительные обстоятельства, которые ниже рассматриваются на примере простейшей одноконтурной системы

$$y = W(p)z, \quad z = f(y), \quad (7.1)$$

где передаточная функция $W(p)$ имеет тот же вид, что и в предыдущем параграфе, $f(y)$ — характеристика люфта.

Будем искать симметричный автоколебательный режим простейшего типа, когда за половину периода переход с граничных прямых нелинейной характеристики внутрь люфта происходит один раз. При таких предположениях имеем

$$\left. \begin{aligned} y(t) = y_n(t) &= -y_n\left(t + \frac{T}{2}\right), \\ z(t) = z_n(t) &= -z_n\left(t + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Выбирая за $t = 0$ момент перехода на кривую граничную прямую нелинейной характеристики, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} z_n(t) &= y_n(t) - \sigma_0, & 0 < t < t_1, \\ z_n(t) &= y_n(t_1) - \sigma_0, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

или, что эквивалентно,

$$z_{\Pi}(t) = a(t) y_{\Pi}(t) + b(t), \quad (7.4)$$

где

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad a(t) = a\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (7.5)$$

и, кроме того,

$$b(t) = \begin{cases} b_1 = -\sigma_0, & 0 < t < t_1, \\ b_2 = y_{\Pi}(t_1) - \sigma_0, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad b(t) = -b\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (7.6)$$

Соотношения (4) — (6) внешне похожи на (6.7) — (6.9). Однако фактически здесь имеется существенная разница, так как в соотношениях (6.7) — (6.9) величины b_1 , b_2 заранее известны, а в данном случае в силу второго соотношения (6) значение постоянной b_2 заранее не определено.

Будем, однако, временно считать величину b_2 известной; тогда для определения автоколебательного режима придем к интегральному уравнению вида (6.10):

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^{T/2} \psi(T, t - \tau) [a(\tau) y_{\Pi}(\tau) + b(\tau)] d\tau$$

или, что эквивалентно,

$$y_{\Pi}(t) = \int_0^{t_1} \psi(T, t - \tau) y_{\Pi}(\tau) d\tau - \sigma_0 \int_0^{t_1} \psi(T, t - \tau) d\tau + \\ + (y_{\Pi}(t_1) - \sigma_0) \int_{t_1}^{T/2} \psi(T, t - \tau) d\tau. \quad (7.7)$$

Применяя способ решения, изложенный в примере 3.3 § 3 гл. V, получим, что постоянные $\tilde{c}_{1\rho}$, определяющие искомый периодический режим, определяются из системы уравнений

$$\tilde{c}_{1\rho} = \sum_{s=1}^n \tilde{u}_{\rho s} \tilde{c}_{1s} + \tilde{\delta}_{\rho}, \quad (7.8)$$

где постоянные коэффициенты $\tilde{u}_\rho$, по-прежнему определяются соотношениями (V.3.86), (V.3.81). Свободные члены $\tilde{\delta}_\rho$, в силу (6) и (V.3.83), в данном случае равны

$$\tilde{\delta}_\rho = -\gamma_\rho \frac{e^{p_\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}} \left[\frac{e^{-p_\rho t_1} - e^{-p_\rho \frac{T}{2}}}{p_\rho} b_2 + \right. \\ \left. + e^{-p_\rho t_1} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} (e^{p_{1\alpha} t_1} - 1)}{p_{1\alpha} (p_{1\alpha} - p_\rho)} b_1 \right]. \quad (7.9)$$

Если подставить сюда (6), то получим

$$\tilde{\delta}_\rho = \varepsilon_\rho \sigma_0 + \eta_\rho y_n(t_1), \quad (7.10)$$

где

$$\varepsilon_\rho = -\gamma_\rho \frac{e^{p_\rho \frac{T}{2}}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}} \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{1\alpha} (1 - e^{p_{1\alpha} t_1}) e^{-p_\rho t_1}}{p_{1\alpha} (p_{1\alpha} - p_\rho)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-p_\rho \frac{T}{2}} - e^{-p_\rho t_1}}{p_\rho} \right], \quad (7.11)$$

$$\eta_\rho = \frac{\gamma_\rho}{p_\rho} \frac{1 - e^{p_\rho (\frac{T}{2} - t_1)}}{1 + e^{p_\rho \frac{T}{2}}}.$$

Решение $y_n(t)$ на интервале $0 < t < t_1$ определяется соотношением, вытекающим из (V.3.40):

$$y_n(t) = -\sigma_0 \int_0^t h_{13}(t - \tau) d\tau + \sum_{\rho=1}^n \tilde{d}_{1\rho} e^{p_{1\rho} t}, \quad (7.12)$$

где, как и ранее,

$$\tilde{d}_{1\rho} = \gamma_{1\rho} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\tilde{c}_{1\alpha}}{p_{1\rho} - p_\alpha}, \quad \sum_{\rho=1}^n \tilde{d}_{1\rho} = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{c}_{1\alpha}. \quad (7.13)$$

Условия переключения для данной задачи в соответствии с рис. 59 можно взять в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_n(t_1) &= 0, \\ y_n\left(\frac{T}{2}\right) - y_n(t_1) &= 2\sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Второе уравнение (14) в силу симметрии периодического режима эквивалентно следующему:

$$y_{\Pi}(0) + y_{\Pi}(t_1) = -2\sigma_0. \quad (7.15)$$

Учитывая, что в силу (12) и (13)

$$y_{\Pi}(0) = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{c}_{1\alpha},$$

из (15) имеем

$$y_{\Pi}(t_1) = - \sum_{\alpha=1}^n \tilde{c}_{1\alpha} - 2\sigma_0. \quad (7.16)$$

Подставляя это выражение в (10), систему уравнений (8) приведем к виду

$$\sum_{s=1}^n (\delta_{\rho s} - \tilde{u}_{\rho s} + \eta_{\rho}) \tilde{c}_{1s} = (\xi_{\rho} - 2\eta_{\rho}) \sigma_0. \quad (7.17)$$

Как следует из [75], определитель при неизвестных $\tilde{c}_{1\rho}$ обращается в нуль, так что снова имеем дело с особым случаем. Используя уравнения (17), а также условия переключения, нетрудно построить уравнения периодов. Для этого заметим, что с помощью (11) и (V.3.36) уравнения (17) представляются в виде

$$\sum_{s=1}^n \xi_{\rho s} \tilde{c}_{1s} = \xi_{\rho} \sigma_0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (7.18)$$

где $\xi_{\rho s}$, ξ_{ρ} — постоянные, известным образом зависящие от t_1 , $T/2$. С помощью (12) и (13) условия переключения (14) можно привести к виду

$$\sum_{s=1}^n a_{\rho s} \tilde{c}_{1s} = b_{\rho} \sigma_0, \quad \rho = 1, 2. \quad (7.19)$$

Тогда, если предположить, что

$$\det \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-1,1} & \dots & \xi_{n-1,n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (7.20)$$

то условия совместности уравнений (18) и (19) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \det \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} & \zeta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} & \zeta_n \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \end{vmatrix} &= 0, \\ \det \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} & \zeta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-1,1} & \dots & \xi_{n-1,n} & \zeta_{n-1} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Соотношения (21) и являются искомыми уравнениями периодов. Они не зависят от ширины люфта. Поэтому времена t_1 и $T/2$, соответствующие возможным симметричным автоколебательным режимам рассматриваемого типа, не зависят от ширины люфта. При найденных t_1 и $T/2$ соответствующие постоянные $\tilde{c}_{1\rho}$ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \xi_{\rho s} \tilde{c}_{1s} &= \zeta_{\rho} \sigma_0, \quad \rho = 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{\rho=1}^n a_{1\rho} \tilde{c}_{1s} &= b_1 \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Перейдем теперь к составлению уравнений в вариациях и характеристического уравнения, определяющего устойчивость колебаний. Для этого прежде всего найдем варьированное уравнение нелинейной характеристики

$$z_1 = \frac{D}{\partial \alpha} f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}. \quad (7.23)$$

В данном случае в силу непрерывности нелинейности оператор обобщенной производной $\frac{D}{\partial \alpha}$ можно заменить на $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, т. е.

$$z_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)]_{\alpha=0}.$$

Но при малых α

$$f[y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha)] = \begin{cases} y_n(t) + \alpha y_1(t, \alpha) + (-1)^{k+1} \sigma_0, & t_k(\alpha) < t < t_{1k}(\alpha), \\ y_n[t_{1k}(\alpha)] + \alpha y_1[t_{1k}(\alpha), \alpha] + (-1)^{k+1} \sigma_0, & t_{1k}(\alpha) < t < t_{k+1}(\alpha), \end{cases} \quad (7.24)$$

где $t_k(\alpha)$ и $t_{1k}(\alpha)$ — соответствующие моменты переключения такие, что

$$t_k(0) = \frac{kT}{2}, \quad t_{1k}(0) = t_1 + \frac{kT}{2}. \quad (7.25)$$

Дифференцируя (24) по α и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим с учетом первого условия переключения (14)

$$z_1(t) = \begin{cases} a(t) y_1(t), & k \frac{T}{2} < t < k \frac{T}{2} + t_1, \\ y_1(kT + t_1), & k \frac{T}{2} + t_1 < t < (k+1) \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (7.26)$$

где функция $a(t)$ определяется по (5), но величина t_1 уже известна.

Из соотношений (26) следует, что варьированное уравнение люфта эквивалентно параллельному соединению ключа и сдвинутого по фазе амплитудно-импульсного элемента. С учетом (26) уравнения в вариациях для системы (1) записываются в виде

$$y = W(p) u, \quad u = a(t) y + W_a(p, t) y, \quad (7.27)$$

где $W_a(p, t) = W_a\left(p, t + \frac{T}{2}\right)$ — передаточная функция импульсного элемента, равная по (IV.1.38) и (IV.1.7)

$$W_a(p, t) = \begin{cases} e^{-p(t-t_1)}, & t_1 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} + t_1. \end{cases} \quad (7.28)$$

Уравнения (27) являются частным случаем уравнений (V.7.1). Поэтому, аналогично (V.7.13), можно сразу по

(IV.7.30) написать характеристическое уравнение системы (27):

$$1 - \int_0^{T/2} \varphi(t, \lambda, 0, -\tau) W_a(\lambda, \tau) d\tau =$$

$$= 1 - \int_{t_1}^{T/2} \varphi(T, \lambda, 0, -\tau) e^{-\lambda(\tau-t_1)} d\tau = 0, \quad (7.29)$$

где $\varphi(T, \lambda, t, \tau)$ — СИЧХ соответствующей замкнутой системы с ключом. Левая часть уравнения (29) периодична по λ с периодом $i\omega$. Переходя к переменной $z = e^{\lambda T}$, из (29) получим алгебраическое уравнение относительно z . В силу автономности исходной системы и симметрии периодического режима, это уравнение имеет по крайней мере один корень, равный $z_1 = -1$. Автоколебания будут устойчивы, если остальные корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга.

Глава I

Общие сведения по теории обобщенных функций можно найти в книгах Г. Бреммермана [9], И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [18, 19], И. Гальперина [16], Я. Микусинского и Р. Снкорского [50, 51], Л. Шварца [110, 111], Г. Е. Шилова [112].

Глава II

Общие соображения об операторном описании элементов и систем автоматического управления имеются в книге [66] под редакцией В. С. Пугачева. Варианты общего изложения теории стационарных систем имеются в книгах Л. Заде и Ч. Дезоера [37], В. М. Броуна [11]. Способы описания линейных стационарных систем с использованием аппарата обобщенных функций даны в книгах О. Феллингера и Г. Шнайдера [100], А. С. Розенфельда и Б. И. Яхинсона [79], Г. Бреммермана [8]. В указанной литературе имеется дальнейшая обширная библиография.

§ 3. Содержание этого параграфа является обобщением изложенного в книге [75]. Теория $\mathfrak{D}$ -преобразования предложена Я. З. Цыпкиным [103].

§ 4—5. Изложение различных общих методов изучения линейных нестационарных систем и дальнейшую обширную библиографию читатель может найти в книгах Л. Заде и Ч. Дезоера [36], А. В. Солодова [85], В. А. Тафта [90, 91], Ф. А. Михайлова, Е. Д. Теряева, Л. М. Булекова, Г. Ю. Данкова, Л. М. Саликова, Г. А. Степаньянца [52], А. С. Шаталова [109], А. Н. Скляревича [82], Е. Н. Розенвассера [75], С. И. Виглина [15]. Идея операторного подхода к описанию и исследованию линейных нестационарных систем и понятие параметрической передаточной функции принадлежат Л. А. Заде [33—36]. Математическое обоснование этого метода дано в книге И. З. Штокало [113] для систем с сосредоточенными параметрами и ограниченным изменением параметров во времени.

§ 6—7. Основные соотношения этих параграфов приведены в работе [78]. Другой подход, основанный на использовании результатов Я. З. Цыпкина, предложен в работе А. Н. Алексеевой и С. В. Шильмана [4].

§ 8. Основные соотношения этого параграфа аналогичны результатам Л. А. Заде [33] и И. З. Штокало [113].

§ 9. Современное состояние вопроса об устойчивости линейных нестационарных систем и библиография даны в книгах Л. Заде и Ч. Дезоера [37], Е. А. Барбашина [6], Ю. Л. Далецкого, М. Г. Крейна [23], Х. Массера, Х. Шеффера [49]. Изложение в этом параграфе следует работе [77].

Глава III

§ 1. Физические соображения о фильтрующих свойствах линейных стационарных систем имеются в работе М. А. Айзермана [3]. Свойства фильтра существенно использованы в работах Л. С. Гольдфарба [20], Е. П. Попова [53—62] и многих других.

§ 2. Материал этого параграфа можно найти в книгах С. Г. Михлина [53], И. И. Привалова [64], В. И. Смирнова [84], книге П. П. Забрейко, А. И. Кошелева, М. А. Красносельского, С. Г. Михлина, Л. С. Раковщика, В. Я. Стеценко [32]. Некоторые дополнительные соотношения имеются в книге [75].

§ 3—5. Основные соотношения этих параграфов являются обобщением результатов, приведенных в [75].

Глава IV

Общие методы описания и исследования линейных импульсных и цифровых систем можно найти в монографиях Я. З. Цыпкина [103], Э. Джури [25], Л. Т. Кузина [43], Ю. Т. Ту [96], С. М. Федорова, А. П. Литвинова [99], П. В. Бромберга [10], В. Я. Катковника и Р. А. Полуэктова [39]. Обзор литературы по импульсным системам дан Э. И. Джури и Я. З. Цыпкиным [26].

§ 1—2. Идея рассмотрения импульсных элементов нелинейных операторов была выдвинута в работе Л. Заде и Дж. Рагазини [70]. Основные соотношения этих параграфов получены в работе [78].

§ 3—5. Операторный метод описания и исследования импульсных систем применялся в работе А. А. Косякина [42], в которой получено выражение передаточной функции одноконтурной импульсной системы со стационарной непрерывной частью. Аналогичный подход применен в работе М. М. Симкина [81] для описания широкого класса нелинейных импульсных систем. Изложение в этих параграфах, в основном, следует работе [78]. Другой подход применен в работе А. Н. Алексеевой и С. В. Шильмана [4].

§ 6. Соотношения этого параграфа, в основном, представляют собой изложенные на языке параметрических передаточных функций классические результаты теории импульсных систем [25, 103].

§ 7. Достаточное условие устойчивости нестационарной импульсной системы, эквивалентное (7.10), использовалось в работах Г. П. Тартаковского [88, 89].

Глава V

Изложению различных подходов к исследованию линейных систем с периодической коммутацией параметров посвящена значительная литература. В работах Ф. М. Килина [40, 41] и И. В. Пышкина [68] для исследования таких систем применен метод припасовывания. Г. Фарманафармой [97, 98] был предложен специальный метод преобразования для исследования систем с ключом. В книге Я. З. Цыпкина [103] изложен подход, использующий комбинацию метода $\mathcal{D}$ -преобразования и интегральных уравнений. Задача о построении передаточных функций систем такого класса рассматривалась Б. Е. Рудницким [80]. Некоторые вопросы исследования систем

с коммутацией параметров рассматриваются также в книге А. С. Розенфельда и Б. И. Яхinsona [79].

§ 1. Результаты этого параграфа, в основном, используют работы [72] и [75].

§ 3—4. Метод решения интегральных уравнений периодических колебаний, применяемый в этих параграфах, близок по идее к методу, использованному Я. З. Цыпкиным в работе [104]. Другой способ составления характеристического уравнения предложен в работе И. В. Пышкина [67].

Глава VI

Различные общие подходы к исследованию периодических колебаний релейных и нелинейных импульсных систем можно найти в работах П. В. Бромберга [10], А. И. Лурье [47], Ю. И. Неймарка [55], Я. З. Цыпкина [102].

§ 1. Более подробные сведения о различных релейных и импульсных элементах можно найти в книгах Я. З. Цыпкина [102], В. М. Кунцевича и Ю. И. Чехового [44].

§ 2. Идея подхода этого параграфа использует метод, развитый применительно к задачам управления А. И. Лурье [47] и Я. З. Цыпкиным [102]. Общая процедура составления периодов для релейных систем с произвольными стационарными элементами и безынерционными нелинейными преобразователями дана в работе Ю. И. Алимова [5].

§ 3. Первое применение аппарата обобщенных функций периодических движений релейных систем, заданных операторными уравнениями, дано Я. З. Цыпкиным [102]. Фактически с использованием обобщенных функций связан и общий метод М. А. Айзермана и Ф. Р. Гаитмахера [2]. Изложение этого параграфа следует работам [74, 76].

§ 5. Другой способ решения этой задачи для систем с сосредоточенными параметрами предложен П. В. Бромбергом [10].

§ 6. Эта задача рассматривалась в работе В. И. Теверовского [94]. Однако решение, предложенное в [94], имеет дефекты.

§ 7. Первые работы, связанные с приближенным исследованием автоматических систем с логическими устройствами методом гармонической линеаризации, принадлежат Б. Н. Петрову и М. В. Стариковой [57] и Е. П. Попову [60].

§ 8. обстоятельное изложение теории релейных экстремальных систем дано в книге И. С. Моросанова [54]. Точное решение задачи об автоколебаниях релейной экстремальной системы методом А. И. Лурье дано в работе Ю. В. Долголенко [28]. На основе метода Я. З. Цыпкина этот вопрос изучался Ю. С. Попковым [58].

§ 9. Метод исследования периодических режимов в системах с ЧИМ, использующий переход к фазовому пространству, приведен в книге В. М. Кунцевича и Ю. И. Чехового [44], в которой имеется и дальнейшая библиография.

§ 10. Точные методы исследования периодических режимов в нелинейных импульсных системах развивались Я. З. Цыпкиным [106, 107]. Более подробная библиография имеется в [44].

§ 11. Исследование периодических колебаний в широтно-импульсной системе методом А. И. Лурье проведено в работе Шао Да Чуана [108]. Подход Я. З. Цыпкина к этой задаче применен И. В. Пышкиным [69].

Глава VII

Общие подходы к задаче о периодических колебаниях кусочно-линейных систем можно найти в работах Ю. И. Неймарка [56], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [1], а также в книге [75].

§ 1—2. Более подробные сведения о построении интегральных уравнений периодических колебаний можно найти в [75].

§ 3. Этот параграф использует работы [74] и [76]. Сходное решение для некоторых частных случаев на основе теоремы М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [2] получено К. К. Беля [87].

§ 4. Общие сведения о системах с переменной структурой можно найти в книге С. В. Емельянова [29], а также книге [30] под редакцией С. В. Емельянова. Задача о влиянии неидеальности переключающего устройства на динамику системы II порядка рассматривалась в работе В. А. Тарана и В. Ф. Швецова [8].

§ 6. Другие способы рассмотрения этой задачи имеются в работах М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [1], Л. А. Гусева [22], К. К. Беля [8]. Однако результаты этих работ надо использовать с учетом наличия особого случая [75].

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Определение периодических режимов в системах с кусочно-линейной характеристикой, составленной из звеньев, параллельных двум заданным прямым. Автоматика и телемеханика, №№ 1, 2, 1957.
2. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Об устойчивости по первому приближению разрывных систем. Прикладная математика и механика, № 5, 1957.
3. Айзерман М. А., Физические основы применения методов малого параметра к решению нелинейных задач теории автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, № 5, 1959.
4. Алексеева А. Н., Шильман С. В., Об одном методе исследования линейных автоматических систем с модуляцией. Автоматика и телемеханика, № 11, 1970.
5. Алимов Ю. И., К расчету периодических режимов в релейных системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, № 7, 1959.
6. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости. «Наука», 1967.
7. Беллман Р., Кук К., Дифференциально-разностные уравнения. «Мир», 1967.
8. Беля К. К., Нелинейные колебания в системах автоматического регулирования и управления. Машгиз, 1962.
9. Бреммерман Г., Распределения, комплексные переменные, преобразования Фурье. «Мир», 1968.
10. Бромберг П. В., Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. «Наука», 1967.
11. Броун В. М., Анализ линейных инвариантных во времени систем. «Машиностроение», 1966.
12. Вавилов А. А., Частотные методы расчета нелинейных систем. «Энергия», 1970.
13. Валеев К. Г., К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика, № 2, 1961.
14. Валеев К. Г., Исследование устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и стационарным запаздыванием методом Хилла. Прикладная математика и механика, № 4, 1962.
15. Виглин С. И., Переходные процессы в системах с переменными параметрами. «Советское радио», 1971.
16. Гальперин И., Введение в теорию обобщенных функций, ИЛ, 1954.
17. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. «Наука», 1966.

18. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1958.
19. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, 1958.
20. Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика, № 5, 1947.
21. Гостев В. И., Определение передаточной функции импульсных систем, имеющих звено первого порядка с периодически и скачком изменяющимися параметрами. Автоматика и телемеханика, № 3, 1968.
22. Гусев Л. А., Определение периодических режимов в системах автоматического регулирования, содержащих нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой. Автоматика и телемеханика, № 10, 1958.
23. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. «Наука», 1970.
24. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч., Пространство состояний в теории управления. «Наука», 1970.
25. Джури Э. И., Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.
26. Джури Э. И., Цыпкин Я. З., Теория дискретных автоматических систем (обзор). Автоматика и телемеханика, № 6, 1970.
27. Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление. Физматгиз, 1961.
28. Долголеик Ю. В., О точном определении автоколебательных режимов в релейных системах экстремального регулирования. В сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем», Изд-во АН СССР, 1960.
29. Емельянов С. В., Системы автоматического управления с переменной структурой. «Наука», 1967.
30. Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А., Костылева И. Е., Шубладзе А. М., Езеров В. П., Дубровский Е. И., Теория систем с переменной структурой. «Наука», 1970.
31. Есипович Е. М., Об импульсных и непрерывных системах, содержащих экстраполирующие устройства. В сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем», Изд-во АН СССР, 1960.
32. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я., Интегральные уравнения. «Наука», 1968.
33. Заде Л. (Zadeh L. A.), Frequency analysis of variable networks. Proc. IRE, v. 38, № 3, 1950.
34. Заде Л. (Zadeh L. A.), The determination of the impulsive response of variable networks. J. Appl. Phys., v. 21, № 7, 1950.
35. Заде Л. (Zadeh L. A.), On stability of linear varying parameter systems. J. Appl. Phys., v. 22, № 4, 1951.
36. Заде Л. (Zadeh L. A.), Time-varying networks, Proc. IRE, v. 49, № 10, 1961.
37. Заде Л., Дезоер И., Теория линейных систем. «Наука», 1970.

38. Зверкин А. М., Дифференциально-разностные уравнения с периодическими коэффициентами. Добавление к книге [7].
39. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Многомерные дискретные системы управления. «Наука», 1966.
40. Килин Ф. М., Некоторые вопросы анализа и синтеза систем с переменными параметрами, изменяющимися скачком. В сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем», Изд-во АН СССР, 1960.
41. Килин Ф. М., Переходные и установившиеся процессы в импульсных системах с переменными параметрами, изменяющимися скачком. Автоматика и телемеханика, № 12, 1957.
42. Косякин А. А., К задаче исследования линейных импульсных систем при стационарных случайных воздействиях. Автоматика и телемеханика, № 3, 1963.
43. Кузин Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
44. Кунцевич В. М., Чеховой Ю. И., Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев, «Техніка», 1970.
45. Ли С. С., Джонс Р. В., Интегральные системы управления с частотно-импульсной модуляцией. В сб. «Дискретные и самонастраивающиеся системы». Труды II Международного конгресса ИФАК, «Наука», 1965.
46. Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, 1951.
47. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
48. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. I. «Наука», 1967.
49. Массера Х., Шеффер Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. «Мир», 1970.
50. Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций. Вып. I, ИЛ, 1959.
51. Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций. Вып. II, ИЛ, 1963.
52. Михайлов Ф. А., Теряев Е. Д., Булеков Л. М., Данков Г. Ю., Саликов А. М., Степаньянц Г. А., Динамика нестационарных линейных систем. «Наука», 1967.
53. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959.
54. Моросанов И. С., Релейные экстремальные системы. «Наука», 1964.
55. Неймарк Ю. И., О периодических режимах движения релейных систем. Сб. «Памяти А. А. Аидронова», Изд-во АН СССР, 1954.
56. Неймарк Ю. И., Метод точечных преобразований в теории нелинейных систем, ч. I, II, III. Изв. вузов, сер. «Радиофизика», №№ 1, 2, 6, 1958.
57. Петров Б. Н., Старикова М. В., Исследование автоколебаний в системах автоматического регулирования с логическими устройствами. Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 3, 1961.

58. Попков Ю. С., Сложные периодические режимы в релейной экстремальной системе. Автоматика и телемеханика, № 12, 1961.
59. Попов Е. П., Об исследовании автоколебательных систем с логическими устройствами. Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 4, 1962.
60. Попов Е. П., О нелинейных законах управления в автоматике. Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 5, 1962.
61. Попов Е. П., К вопросу обоснования методов, основанных на принципе гармонического баланса. В сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования», ГЭИ, 1962.
62. Попов Е. П., Об особенностях введения малого параметра при исследовании нелинейных колебаний в автоматических системах. Прикладная математика и механика, № 1, 1962.
63. Попов Е. П., Пальтов И. Г., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
64. Привалов И. И., Интегральные уравнения. ОНТИ НКТП СССР, 1937.
65. Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. «Наука», 1966.
66. Пугачев В. С. (ред.), Основы автоматического управления. Физматгиз, 1963.
67. Пышкин И. В., Устойчивость одного класса систем с переменными параметрами, изменяющимися периодически и скачком. Автоматика и телемеханика, № 9, 1961.
68. Пышкин И. В., Точный метод расчета переходных процессов и устойчивости импульсных систем с конечным временем съема данных. Автоматика и телемеханика, № 9, 1963.
69. Пышкин И. В., Автоколебания в системах с широтно-импульсной модуляцией. В сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем», Изд-во АН СССР, 1960.
70. Рагаzzини Дж., Заде Л. (Ragazzini J., Zadeh L.). Analysis of sampled-data systems. Trans. AIEE, v. 71, pt. II, 1952.
71. Розенвассер Е. Н., О приведении уравнений нелинейной системы регулирования к простейшему виду. Автоматика и телемеханика, № 1, 1960.
72. Розенвассер Е. Н., О точном определении автоколебаний кусочно-линейных непрерывных систем. Автоматика и телемеханика, № 1, 1963.
73. Розенвассер Е. Н., Общие уравнения чувствительности разрывных систем. Автоматика и телемеханика, № 3, 1967.
74. Розенвассер Е. Н., О построении уравнений чувствительности разрывных систем, заданных операторными уравнениями. Автоматика и телемеханика, № 5, 1969.
75. Розенвассер Е. Н., Колебания нелинейных систем. «Наука», 1969.
76. Розенвассер Е. Н., Об аналитическом исследовании устойчивости периодических движений разрывных систем. Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям. «Наука», 1969.

77. Розенвассер Е. Н., Об устойчивости линейных нестационарных систем. Тезисы V Всесоюзного совещания по проблемам управления. «Наука», 1971.
78. Розенвассер Е. Н., О построении и преобразовании передаточных функций линейных периодических систем. Автоматика и телемеханика, № 2, 1972.
79. Розенфельд А. С., Яхинсон Б. И., Переходные процессы и обобщенные функции. «Наука», 1966.
80. Рудницкий Б. Е., О передаточных функциях систем, параметры которых изменяются периодически скачком. Автоматика и телемеханика, № 9, 1964.
81. Симкин М. М., К определению класса нелинейных импульсных автоматических систем, ДАН СССР, т. 168, № 4, 1966.
82. Складчиков А. Н., Операторные методы в статистической динамике автоматических систем, «Наука», 1965.
83. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. I. Гостехиздат, 1948.
84. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
85. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, 1962.
86. Старикова М. В., Автоколебания и скользящий режим в системах автоматического регулирования. Машгиз, 1962.
87. Таран В. А., Швецов В. Ф., Влияние гистерезиса на динамику систем автоматического регулирования с переменной структурой. В сб. «Системы с переменной структурой и их применение в задачах автоматического полета», «Наука», 1968.
88. Тартаковский Г. П., Устойчивость линейных импульсных систем с переменными параметрами. Радиотехника и электроника, № 1, 1957.
89. Тартаковский Г. П., Элементы теории импульсных систем с переменными параметрами. В сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем». Изд-во АН СССР, 1960.
90. Тафт В. А., Основы спектральной теории и расчет цепей с переменными параметрами. «Наука», 1964.
91. Тафт В. А., Электрические цепи с переменными параметрами. «Энергия», 1968.
92. Теверовский В. И., Периодические режимы в релейных системах, содержащих звено со скачкообразно меняющимися параметрами. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 5, 1962.
93. Теверовский В. И., Устойчивость периодических режимов в релейной системе, содержащей звено со скачкообразно изменяющимися параметрами. Техническая кибернетика, № 2, 1963.
94. Теверовский В. И., О периодическом режиме релейной системы с изменяющимся «чистым запаздыванием». Автоматика и телемеханика, № 1, 1966.
95. Троицкий В. А., К задаче об автоколебаниях в системах автоматического регулирования с двумя сервомоторами постоянной скорости. Прикладная математика и механика, № 5, 1956.
96. Ту Ю. Т., Цифровые и импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.

97. Фарманафарма Г. (Farmanafarma G.), Analysis of linear sampled data systems with finite pulse width (open loop). AIEE Trans., v. 75, pt. I, 1956.
98. Фарманафарма Г. (Farmanafarma G.), Analysis of multiple-sampler-systems with finite pulse width. AIEE Trans., v. 77, pt. II, 1958.
99. Федоров С. М., Литвинов А. П., Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. «Энергия», 1965.
100. Феллиигер О., Шнайдер Г., Линейные системы передачи. «Мир», 1964.
101. Фнхтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. «Наука», 1970.
102. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1955.
103. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
104. Цыпкии Я. З., К теории импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией II рода. ДАН СССР, т. 139, № 4, 1961.
105. Цыпкин Я. З., Метод Гольдфарба и его применение для анализа периодических режимов в нелинейных импульсных системах. В сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования», ГЭИ, 1962.
106. Цыпкин Я. З., Периодические режимы в нелинейных импульсных системах. Труды Ташкентского политехнического института, вып. 20, 1961.
107. Цыпкин Я. З., Об исследовании устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных автоматических системах. Автоматика и телемеханика, № 6, 1961.
108. Шао Да Чуан, Возможность некоторого вида колебаний в замкнутой системе с импульсным элементом. Автоматика и телемеханика, № 1, 1959.
109. Шаталов А. С., Преобразования сигналов автоматического управления. «Энергия», 1965.
110. Шварц Л. (Schwartz L.), Математические методы для физических наук. «Мир», 1965.
111. Шварц Л. (Schwartz L.), Theorie des distributions, vol. 1, 2. Hermann — Lie, Paris, 1951, 1957.
112. Шилов Г. Е., Математический анализ. «Наука», 1965.
113. Штокало И. З., Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изд-во АН УССР, Киев, 1961.

Автоколебания симметричные 487

Вольтерра уравнение интегральное 300

Вычет 158

Вычисление передаточной функции замкнутой системы 209

Дифференцирование обобщенных функций 21

Закон экстраполяции степенной 231

Звено дифференцирующее 72

— интегрирующее 72

— с периодическим запаздыванием 144

Знаменатель Фредгольма 189

Зона нечувствительности реле 363

Интегрирование обобщенных функций 45

Исчисление операционное обобщенных функций 58

Квадрат основной 186

Колебания вынужденные 307

— периодические 362, 462

Коэффициент возврата 364

Лапласа преобразование 55

— — обратное 58

Матрица весовая 170

— передаточная 170

Метод Хилла 213

Модуляция частотно-импульсная 367, 429

— широко-импульсная 367

Момент переключения 365

Нелинейность дискретная (периодическая) 368

— типовая 487

Норма матрицы 173

Носитель обобщенной функции 48

— обыкновенной функции 48

Оператор дискретный 368

— дифференциальный (сопряженный) 23

— кусочно-линейный 455

— линейный нестационарный 113

— — — периодический 113

— — стационарный 77, 80, 94

— нестационарный 73

— периодический 459

— стационарный 73

— физически реализуемый 115

Период элемента 368

Показатель характеристический 160

Представление каноническое 120

Преобразование Лапласа 55

— — обратное 58

Производная от обобщенной функции 22

— — — по параметру 35

— от разрывной функции 25

Пространство основное (основных функций) 14

Процесс переходный 155

— установившийся 155

Равенство обобщенных функций 20

Режим насыщенный 444

— периодический нормальный 389

Резольвента Фредгольма 176, 188

Резонанс 97, 213

Ряд Фурье для обобщенной функции 62

Свертка обобщенных функций 47, 67, 76

Сдвиг обобщенной функции 19

Система автономная 369, 459

— восходящая 247

— импульсная 362

— разомкнутая 237

— кусочно-линейная 455, 459

— линейная многомерная 336

— — нестационарная 121

— — периодическая 72, 121

— — — многомерная 169

— — с периодической коммутацией параметров 354

— — стационарная 87

— многоконтурная 263

— неавтономная 369

— нелинейная амплитудно-импульсная 435

Система нелинейная с ключом 473
 — непрерывно-импульсная 264
 — нисходящая 247
 — одноконтурная 251
 — первого приближения 391
 — периодическая 459
 — резонансная 111
 — релейная 362
 — с изменяющимся запаздыванием 410
 — с логическим устройством 416
 — с люфтом 493
 — с нерезонансной линейной частью 392
 — с обратной связью 147
 — с переменной структурой 478
 — с периодической коммутацией параметров 290
 — с резонансной линейной частью 401
 — стационарная 459
 — фильтрующая 175
 — цифровая 221
 — широтно-импульсная 442
 — экстремальная 425
 Сложение обобщенных функций 18
 Сходимость 14

Тип периодического выходного сигнала 372

Умножение обобщенных функций 18, 29
 Уравнение в свертках 69
 — интегральное Вольтерра 300
 — — Фредгольма II рода 176, 185, 292
 — периодов 376
 — характеристическое 281
 Усилитель безынерционный 137
 — идеальный 72
 Условие нормальности переключения 377, 389, 390
 — отсутствия дополнительных переключений 377
 — переключения 365
 — физической реализуемости системы 81
 Устойчивость 354
 — в замкнутых фильтрующих системах 213

Устойчивость линейных периодических систем 161
 — периодических импульсных систем 277
 — — колебаний 381, 469
 Устройство экстраполирующее линейное 231

Фредгольма знаменатель 189
 — резольвента 176, 188
 — уравнение интегральное II рода 176, 185, 292
 Функционал 14
 — линейный непрерывный 15
 Функция весовая 73, 79, 127
 — кусочно-аналитическая 41
 — модулируемая 222
 — обобщенная, зависящая от параметра 33
 — — периодическая 60
 — — регулярная 16
 — — сингулярная 16
 — — Шварца 15
 — передаточная 73, 79, 92, 127, 130, 147, 251
 — — формирующего элемента 224
 —, δ -функция 17
 Фурье ряд для обобщенной функции 62

Характеристика импульсно-частотная (ИЧХ) 77, 94, 130
 — — смещенная (СИЧХ) 77, 98
 Хилла метод 213

Экстраполятор с обратной связью 232
 Элемент амплитудно-импульсный 142, 221, 222
 — импульсный 366
 — кусочно-линейный 457
 — линейный 78
 — направленного действия 77
 — релейно-импульсный 367

Ядро, аналитически зависящее от параметра 198
 — интегрального уравнения 186
 — сопряженное 187